



ARTÍCULO

La estructura temporal de los tipos de interés: conceptos y procedimientos de estimación

Julián Andrada-Félix, Adrián Fernández-Pérez* y Fernando Fernández-Rodríguez

Facultad de Economía, Empresa y Turismo, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, Las Palmas de Gran Canaria, España

Recibido el 15 de diciembre de 2012; aceptado el 9 de mayo de 2013

CÓDIGOS JEL

E43;
G12

PALABRAS CLAVE

Estructura temporal
de tipos de interés;
Renta fija

JEL CLASSIFICATION

E43;
G12

KEYWORDS

Term structure
of interest rates;
Fixed income

Resumen En este trabajo hemos pretendido ofrecer una visión general sobre la estructura temporal de tipos de interés (ETTI). Con dicho propósito, hemos comenzado explicando el significado económico de la ETTI, para posteriormente hacer una revisión de los modelos de su estimación más empleados en la literatura, así como de las diferentes hipótesis sobre su forma. © 2012 Asociación Cuadernos de Economía. Publicado por Elsevier España, S.L. Todos los derechos reservados.

Term structure of interest rates: Concepts and an estimation procedure

Abstract The paper reviews the literature on the term structure of interest rates (TSIR). This was done by defining the concept, explaining its use, and detailing the methodologies employed to derive the TSIR. We also put forward theoretical rationales on its model.

© 2012 Asociación Cuadernos de Economía. Published by Elsevier España, S.L. All rights reserved.

*Autor para correspondencia.

Correo electrónico: adrian.fernandez102@alu.ulpgc.es (A. Fernández-Pérez).

1. Estructura temporal de los tipos de interés

La estructura temporal de tipos de interés (ETTI) o curva de tipos al contado (*spot*) se define como la relación funcional entre el tipo de interés nominal en los préstamos sin riesgo de la economía y el tiempo hasta su vencimiento (Pérez-Rodríguez et al., 2002). Los bonos cupón cero, emitidos al descuento, son los títulos de renta fija que mejor reflejan esta relación funcional ya que garantizan un único pago, denominado valor facial o nominal, al vencimiento establecido en una fecha futura conocida. La forma funcional de la ETTI debería poseer, por sus importantes implicaciones para la teoría financiera, dos características básicas: continuidad y suavidad. La suavidad garantiza la continuidad de la ETTI a plazo (*forward* implícito), lo cual es un requerimiento para la hipótesis de no arbitraje en el contexto financiero.

La ETTI¹ manifiesta esta dependencia de los tipos de interés y su plazo de amortización. Considerando que el tipo de interés aplicable en cada situación puede depender de muchos factores, de entre todos ellos, existen dos factores que son claves: *el riesgo de crédito* o riesgo de que el prestatario no cumpla su compromiso de pago, el cual es valorado por medio de la calidad crediticia del prestatario; y *el tiempo que dura el préstamo*, ya que en general, los prestamistas exigirán una prima de riesgo por prestar dinero a un plazo más largo, es decir, siempre preferirán recibir el dinero cuanto antes.

Los profesionales del mercado, los inversores, los bancos centrales y las autoridades monetarias están interesados en conocer la ETTI, ya que esta estructura muestra la información del consenso del mercado sobre la futura evolución de los tipos, es decir, permite cuantificar lo que piensa el mercado sobre lo que sucederá en el futuro con los tipos de interés. Por su parte, los investigadores usan el mercado de deuda gubernamental (Letras del Tesoro, Bonos y Obligaciones del Estado) como la base en la modelización y estimación de la ETTI, aunque el fenómeno de la existencia de una estructura temporal se produce también en la renta fija privada. Esto es así, ya que en general, los rendimientos monetarios obtenidos de la inversión en la Deuda Pública de un país tienen el mismo tratamiento fiscal, y a la vez, los riesgos implícitos de la inversión en renta fija asociados a la insolvencia y a otros problemas como la iliquidez son mínimos en estos activos, no siendo así totalmente eliminados, como se ha demostrado recientemente en las crisis de la Deuda Pública de Islandia (2008) y Grecia (2010).

De forma sintética cabría señalar los principales usos de la ETTI en los siguientes:

- **Establecer los rendimientos de todos los instrumentos del mercado de deuda.** La ETTI fija esencialmente el precio del dinero según el plazo, por lo que sirve de referencia para valorar todos los instrumentos de deuda. Por ejemplo, si los rendimientos a cinco años de los bonos del gobierno están al 4%, todos los demás bonos a cinco años tendrán unos rendimientos por encima del 4%, siendo la cantidad que excede a este hipotético 4% denominada *spread*.

- **Actuar como indicador de futuros niveles de tipos de interés e instrumento esencial de la política monetaria.** La ETTI tiene ciertas formas características que reflejan las expectativas del mercado sobre los futuros tipos de interés, siendo su uso estándar en la política monetaria. Tanto es así que los bancos centrales estiman los tipos *forward* porque reflejan las expectativas del mercado sobre los futuros niveles de inflación y de tipos de interés.
- **Valoración y comparación de rendimientos a lo largo del espectro de vencimientos.** Los inversores en los mercados financieros usan la ETTI para estimar un precio de equilibrio para los activos de renta fija. De esta forma, valoran qué vencimiento de la curva ofrece el mejor rendimiento relativo a otro.
- **Indicar el valor relativo de diferentes bonos de similar vencimiento.** La ETTI indica qué bonos son caros o baratos, en relación con lo que el mercado en su conjunto considere cuál es el precio objetivo de un bono, y por tanto cuáles deberían comprarse o venderse.
- **Cobertura de riesgos y valoración de derivados sobre tipos de interés.** El tipo de interés libre de riesgo (normalmente Letras del Tesoro a tres meses, o la tasa *repo*² a corto plazo del Estado) es uno de los parámetros usados en la valoración de derivados financieros.

La amplia aplicabilidad que presenta la ETTI conduce a que los diversos aspectos de su estimación pueden estar sujetos al uso que pretenda hacerse de ella. En este sentido, cabría señalar que cuando el uso fundamental de la ETTI sea la política gubernamental más que la valoración de instrumentos financieros, su estimación debería basarse en los siguientes criterios: el método de estimación debería tener como objetivo primordial ajustar los tipos *forward* implícitos y no los tipos *spot*; y la curva de tipos *forward* resultante debería ser tan suave como fuera posible porque el objetivo es proporcionar información sobre futuros niveles de los tipos de interés y las expectativas en la política monetaria del banco central.

Una forma muy fácil de establecer una relación funcional entre el tipo de interés nominal en los préstamos sin riesgo y el tiempo hasta su vencimiento, se obtiene considerando la tasa interna de rendimiento (TIR) de los diferentes activos de Deuda Pública. Concretamente, la TIR se define como aquel tanto efectivo y_T que iguala el valor actual de la corriente de pagos generada por el título con el precio de mercado del mismo:

$$P = \frac{C}{(1 + y_T)} + \frac{C}{(1 + y_T)^2} + \dots + \frac{C + N}{(1 + y_T)^T}$$

Por tanto, es posible establecer una relación entre los valores de la TIR correspondientes a títulos emitidos por la misma entidad con diferentes plazos hasta la amortización. Esta relación recibe el nombre de curva de rendimientos (*yield curve to maturity*). Esta curva de rendimientos es solo una aproximación de la ETTI que a veces puede resultar poco satisfactoria en la medida en que los tipos de interés sean más o menos constantes para todos los periodos futu-

1. El tipo de interés refleja el valor del tiempo y el riesgo dentro de la Economía.

2. *Repo* son las siglas, en inglés, de pacto de recompra (*repurchase agreement*).

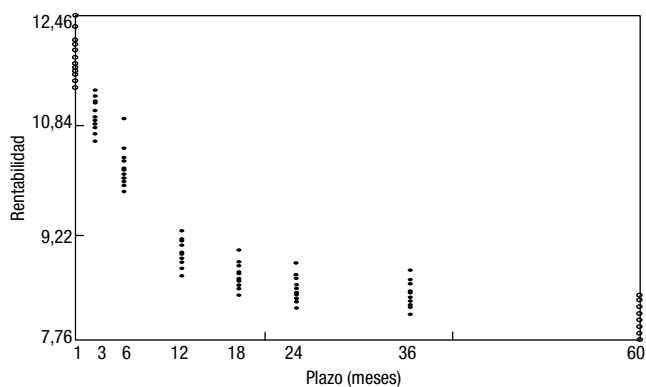


Figura 1 La dispersión de la tasa interna de rendimiento.
Fuente: Pérez-Rodríguez et al. (2002).

ros, pues implicaría una curva de rendimientos plana. En la figura 1 se muestra la dispersión entre las TIR de diferentes conjuntos de bonos con cupón del mismo vencimiento (Pérez-Rodríguez et al., 2002).

La apreciable dispersión que presentan los rendimientos internos de los títulos se debe a diversas razones como el sesgo del cupón, la imposición diferencial, la amortización anticipada, el riesgo de mercado, etc. Desde el punto de vista económico resulta esencial poder estimar un tipo de interés que solo dependa del plazo de vencimiento y que no esté sujeto a las perturbaciones señaladas.

Una forma de evitar el sesgo de los pagos de cupón en la construcción de la ETTI se consigue estimando la curva de rendimientos a la par. En tal caso, todos los bonos a la par con el mismo vencimiento tienen la misma TIR; ello se debe a que en los bonos a la par los cupones son únicos pues han de ser iguales a la TIR. Así, el empleo de bonos a la par evita tanto los efectos de diferencias en el tratamiento impositivo de los pagos de cupón como el riesgo de ganancias de capital que caracterizan a la TIR. En este sentido, debe tenerse en cuenta que la TIR solo es igual a la tasa de rentabilidad realizada por un bono si todos los cupones se reinvierten a la misma tasa. Así pues, si los tipos de interés varían, digamos que bajan, los cupones habrán de reinvertirse a una tasa inferior, aunque el precio del bono suba. En cambio, si los tipos de interés suben, aunque ello favorece la reinversión de cupones, el precio del bono baja y se produce una pérdida inmediata de capital.

Otra forma de eliminar la falta de unicidad en la relación rendimiento-vencimiento consiste en restringirnos a las TIR de los bonos «cupón cero»³, obteniendo lo que se conoce como la curva *spot* de bonos cupón cero (*zero coupon yield curve* o simplemente *yield curve*).

Dichas curvas *spot* de tipos cupón cero tienen dos ventajas sobre la tasa interna de rendimiento, que enumeramos a continuación:

- Los tipos de interés cupón cero expresan de manera insesgada (sin riesgo de reinversión de flujos intermedios) la rentabilidad exigida por el mercado a la tenencia de bo-

nos hasta la fecha de amortización final, siendo la diferencia entre el tipo cupón cero teórico y la TIR de un bono de igual plazo de vida residual el denominado «sesgo de cupón».

- Las curvas de tipos cupón cero estimadas permiten derivar tipos a plazos implícitos, es decir plazos para los que no exista un bono específico, lo que no es posible con aquellas de TIR-plazo.

Por todo ello, la modelización econométrica de la función de descuento a partir de los precios de los bonos, y no de sus rendimientos internos, es una línea metodológica de calidad superior iniciada por McCulloch (1971, 1975) quien estimó la función de descuento y la curva cupón cero a partir de los precios de mercado de los bonos.

La ETTI estimada a partir de la curva de tipos cupón cero, definiéndose así la relación entre el conjunto de rendimientos de los bonos cupón cero y sus respectivos vencimientos en cada instante del tiempo, se denota por

$$R(0,1), R(0,2), R(0,3), \dots, R(0,t)$$

donde el cero hace referencia al instante actual en el que se observa la ETTI y t representa el vencimiento de un determinado bono. Hay que tener en cuenta que, aunque el riesgo de incumplimiento aumenta de forma genérica cuando aumenta el vencimiento de una deuda, la ETTI no tiene por qué ser siempre creciente, obteniéndose así los siguientes casos:

- Si $R(0,t) > R(0,t-1)$ para todo t , diremos que se trata de una estructura temporal creciente.
- Si $R(0,t) < R(0,t-1)$ para todo t , diremos que se trata de una estructura temporal invertida.
- Si $R(0,t) = R(0,t-1)$ para todo t , diremos que se trata de una estructura temporal plana. Solo en este caso podemos representar a toda la ETTI de forma exacta por un único rendimiento, donde $R(0,1) = R(0,2) = \dots = R(0,t) = \dots = r$.

Adicionalmente, pueden existir estructuras temporales con una o varias jorobas, donde la ETTI aumenta con t hasta cierto punto para luego disminuir. Aunque, en general, se espera que la ETTI tenga una forma creciente con ligera inclinación, dando lugar a que los rendimientos se incrementen con el vencimiento por dos razones: por la inflación que erosiona el valor de un préstamo y porque se necesitan rendimientos mayores para compensar mayores riesgos de interés para periodos más largos.

Por todo ello, la forma típica de la ETTI tiene una forma *normal* (fig. 2), una estructura creciente que suele estancarse a partir de los cinco años y que normalmente decrece en el tramo entre veinte y treinta años debido a la gran demanda entre los inversores institucionales (tales como fondos de pensiones) de bonos a largo plazo. Ello tira del precio hacia arriba y de los rendimientos hacia abajo.

No obstante, también pueden presentarse formas muy diversas (fig. 2), teniendo cada una de ellas una usual relación con la fase del ciclo económico en el que se encuentre la economía. Concretamente, la forma *empinada* ocurre típicamente durante el fin de un periodo de depresión del ciclo económico, cuando después de muchas reducciones de los

3. La TIR coincide con su tipo *spot* (o al contado) en un bono cupón cero.

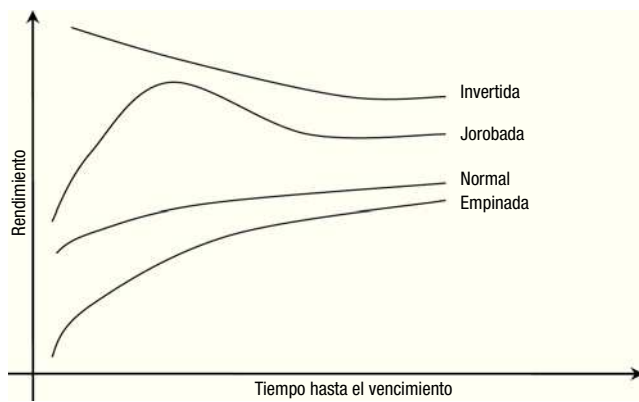


Figura 2 Formas de la estructura temporal de tipos de interés.

tipos de interés por el banco central, la economía parece que va recuperarse en el futuro. Por su parte, la forma *invertida* se produce típicamente en la cresta del ciclo económico, cuando tras muchos incrementos del tipo de interés por el banco central, al boom económico conseguido le puede seguir una recesión. Finalmente, la forma en *jobada* se produce típicamente cuando el mercado espera una corta recuperación económica seguida de una recesión.

Todas estas formas contienen información sobre las expectativas de la evolución de los tipos futuros. Por ejemplo, la forma empinada sugiere que los futuros tipos a corto plazo serán más altos que los corrientes. Sin embargo, las expectativas no explican plenamente las diferentes formas que puede adoptar la ETTI, y tradicionalmente existen cuatro hipótesis alternativas básicas para explicar las diferentes formas de la ETTI:

- La hipótesis de las expectativas del mercado.
- La hipótesis de la prima de liquidez.
- La hipótesis de la segmentación del mercado.
- La hipótesis del hábitat preferido.

A continuación, vamos a resumir dichas hipótesis.

1.1. Hipótesis de las expectativas

La hipótesis de expectativas puras o insesgadas fue introducida por Fisher (1896), y afirma que la pendiente (o *spread*) de la ETTI es atribuible a las expectativas de cambio en los tipos de interés a corto plazo. Concretamente, se pueden dar tres situaciones:

- Una ETTI creciente que reflejaría, según esta hipótesis, expectativas de subidas de los tipos a corto plazo.
- Una ETTI invertida que reflejaría expectativas de caída de los tipos a corto plazo.
- Una ETTI plana que reflejaría expectativas de que los tipos a corto plazo actuales se mantendrán en el futuro.

En la literatura, existen otro tipo de formulaciones similares de la hipótesis de expectativas que no son totalmente equivalentes en un mundo con incertidumbre.

Las formulaciones alternativas de la hipótesis de expectativas son las siguientes:

- Los tipos forward son predictores insesgados de las futuras tasas spot. Así, se tendrá

$$E[R(t, T, T + 1)] = f(t, T, T + 1) \text{ con } T > t$$

donde $f(t, T, T + 1)$ es el tipo *forward* existente en el instante t entre los periodos T y $T + 1$, y $R(T, T + 1)$ es el tipo *spot* desde el instante T hasta el $T + 1$, que en $t < T$ es una variable aleatoria. Esta formulación de la evolución de la ETTI conduce a una determinada dinámica predictiva de los futuros tipos *spot* año tras año, bajo el supuesto de que se verifican las expectativas. Así, la dinámica de expectativas consiste en suponer que los futuros tipos *spot* realizados coinciden, exactamente, con los valores de los correspondientes tipos *forward* originales, de manera que la hipótesis de expectativas no solo se verifica en promedio sino de forma exacta. En la práctica, los tipos futuros implícitos en los *forward* no suelen coincidir con los tipos futuros reales. Aun así, estos tipos futuros extraídos de los *forward* son los que los agentes del mercado esperan, a día de hoy, que se produzcan en el futuro. Por ello, pueden usarse como base para la toma de posiciones en los mercados de renta fija.

- Todos los bonos de diferentes vencimientos son sustitutos perfectos. Los rendimientos obtenidos al comprar activos gubernamentales a largo plazo durante un determinado periodo deberían ser iguales que los rendimientos obtenidos en ese mismo periodo comprando tales activos a corto plazo; así, por ejemplo, el rendimiento de comprar una Letra del Tesoro a tres meses y mantenerla hasta su vencimiento, y el rendimiento de comprar un bono del gobierno a doce meses y mantenerlo durante tres meses deberían ser idénticos según esta hipótesis.
- Los rendimientos de los bonos hasta el vencimiento coinciden con los de una estrategia de reinversiones sucesivas. Esta formulación establece que el rendimiento generado por poseer un bono durante T años será igual al rendimiento esperado de una estrategia «roll over» de sucesivas reinversiones de bonos a corto plazo que se van reinvertiendo en otros a medida que van madurando, hasta que pasen T años. En términos matemáticos

$$\frac{1}{P(t, T)} = (1 + R(t, T))^T = E_t[(1 + R(t, t_1))(1 + R(t_1, t_2)) \dots (1 + R(t_{n-1}, t_n = T))]$$

que es precisamente la hipótesis de expectativas insesgadas.

1.2. Hipótesis de la prima de liquidez o de las expectativas sesgadas

La hipótesis de la preferencia por la liquidez de los inversores fue introducida por Hicks (1939), y postula que los rendimientos de los bonos a los que les falta mucho para el vencimiento deben de ser superiores a los rendimientos esperados de los bonos de vencimiento corto. Las razones en las que se basa este postulado son dos: primera, los bonos a corto plazo son más líquidos⁴; y segunda, estos bonos sopor-

4. Hoy en día, al existir una extraordinaria cantidad de mercados de bonos activos en el mundo, tanto corporativos como de deuda del estado, la liquidez de los bonos a largo plazo es prácticamente tan grande como aquella de los bonos a corto plazo.

tan menor riesgo de subida de tipos. En consecuencia, para que se verifique la hipótesis de expectativas es necesaria la neutralidad ante el riesgo por parte de los inversores. Así, incluso cuando en el mercado no existan expectativas de subida de los futuros tipos a corto plazo, la ETTI será una función creciente del tiempo hasta el vencimiento. Por tanto, los prestamistas exigirán una prima de liquidez por prestar dinero a más largo plazo:

$$\frac{E_t[P(t_1, T)] - P(t, T)}{P(t, T)} = \frac{E_t[P(t_1, T)]}{P(t, T)} - 1 = R(t, t_1) + L(t, t_1, T)$$

donde, el primer miembro es el rendimiento esperado de comprar hoy, en el instante t , un bono que vence en el instante T y venderlo en el instante t_1 siendo $t < t_1 < T$; $R(t, t_1)$ es el tipo *spot* (que hoy conocemos con certeza) por prestar entre los instantes t y t_1 ; y $L(t, t_1, T)$ es la prima de liquidez, la cual es función del tiempo de vencimiento del bono y representa el exceso de rendimiento esperado por mantener un bono hasta el instante futuro t_1 sobre el tipo *spot* vigente en este momento $R(t, t_1)$.

La hipótesis de la prima de liquidez es una forma menos radical de la hipótesis de expectativas que no requiere neutralidad ante el riesgo por parte de los agentes. Esta teoría de la preferencia de la liquidez es capaz de explicar las formas crecientes de la ETTI sin suponer que los tipos *forward* sean expectativas insesgadas de los tipos *spot* futuros. Otra forma alternativa de establecer esta hipótesis es diciendo que los tipos *forward* son predictores sesgados de los futuros tipos *spot*. Por lo que la tasa *forward* a un periodo es el valor esperado de la tasa *spot* más una prima de liquidez

$$f(t, T, T+1) = E_t[R(T, T+1)] + L(t, T, T+1)$$

donde la prima de liquidez $L(t, T, T+1)$ declinará con el tiempo cuando se acerca la fecha de vencimiento.

Por tanto, según la hipótesis de la preferencia por la liquidez, la ETTI debería ser casi siempre creciente con independencia de las expectativas debido a la prima por liquidez. Así, el tipo *forward* no es una buena estimación de las expectativas del mercado sobre los futuros tipos de interés, incluso si se espera que los tipos permanezcan sin cambio.

1.3. Hipótesis de la segmentación del mercado

La hipótesis de segmentación del mercado fue sugerida por Culbertson (1957), y establece que existen mercados separados para cada vencimiento específico de la curva de tipos. Así, los bonos con diferentes vencimientos no son sustitutos perfectos unos de otros. Esta hipótesis se basa en que los mercados tienen diferentes tipos de participantes con diferentes requerimientos, los cuales invierten en diferentes partes de la estructura temporal. Por ejemplo, el sector bancario y las sociedades de construcción se concentran en bonos de corto vencimiento, no mayores de cinco años; en cambio, los fondos de pensiones y las compañías de seguros se concentran en bonos a largo plazo. Debido a la segmentación de la oferta y la demanda en los diferentes segmentos del mercado, los precios de los bonos y los tipos de interés en dichos segmentos se comportan de forma relativamente independiente. Por ello, ni la curva de tipos ni la función de descuento son necesariamente suaves y continuas entre los

diferentes segmentos, y por tanto los tipos *forward* tienen poco contenido informativo.

Esta hipótesis explicaría una ETTI *invertida* argumentando que cuando los bancos realizan una gran demanda de bonos a corto plazo caen sus rendimientos. Sin embargo, cuando los bancos liquidan, simultáneamente, parte de sus tenencias en estos bonos para atender a una mayor demanda de préstamos, los rendimientos de los bonos a corto plazo suben, pero no los de largo plazo.

1.4. Hipótesis del hábitat preferido

La hipótesis del hábitat preferido fue desarrollada por Modigliani y Sutch (1966), y es una variante de la hipótesis de la prima o preferencia por la liquidez y de la hipótesis de segmentación de mercados. Esta hipótesis sugiere que los participantes del mercado tienen preferencia por zonas específicas de la curva, aunque pueden animarse a comprar bonos de otras partes del espectro de vencimientos si tienen suficientes incentivos. Así pues, cuando la oferta y demanda de bonos en un tramo específico de la ETTI no coinciden, se produce un desequilibrio. En tal caso, algunos inversores se pueden mover a otros tramos donde existe un desequilibrio inverso si la diferencia entre los rendimientos les resulta atractiva, siempre que reciban una prima de riesgo para compensar su aversión al riesgo. Los diferentes segmentos del mercado son interdependientes y tanto la ETTI como la función de descuento son funciones suaves frente al vencimiento y no tienen una forma dentada.

Todas las explicaciones a la forma de la ETTI expuestas encierran algún elemento de verdad. La teoría de las expectativas es la más analítica, pues ofrece unos valores numéricos concretos para las expectativas, por lo que puede ser contrastada. En este sentido, los contrastes realizados en la literatura (ver Campa y Chang, 1995; Longstaff, 2000, y Martellini et al., 2003, entre otros) muestran que funciona relativamente bien, con una desviación que podría ser explicada por la preferencia de la liquidez. Así, la hipótesis de expectativas combinada con consideraciones de riesgo sobre la preferencia por la liquidez, unida con una determinada demanda de bonos de alto vencimiento, por su efecto de convexidad⁵, pueden ofrecer una buena explicación al comportamiento de la ETTI.

2. Dificultades para estimar la estructura temporal de tipos de interés con bonos cupón cero

La ETTI correspondiente a la curva cupón cero no es directamente observable en la práctica, por lo que su estimación se ve dificultada por varias razones que enumeramos a continuación:

- *El mercado no es completo.* En muchos mercados existen pocos bonos cupón cero con vencimientos superiores a un año. En este sentido, cabe señalar que en el mercado es-

5. La convexidad es la aproximación de segundo orden del impacto relativo en el precio del cambio en la TIR, es decir, $\frac{1}{P} \frac{d^2 P}{dy^2}$.

pañol de Deuda Pública no existen bonos cupón cero con vencimiento superior a dieciocho meses, por lo que los tipos de interés al contado no son, en general, directamente observables.

- *La falta de liquidez.* La falta de liquidez de determinados instrumentos como los *strips*⁶ de la Deuda Pública hace que la ETTI no pueda ser estimada únicamente usando bonos cupón cero. Por lo que habrá que utilizarse también bonos con cupón.
- *Las dificultades de los bonos con cupón.* Las dificultades adicionales en la estimación de los bonos con cupón se derivan de la presencia de perturbaciones en los precios de los bonos por los cupones, la liquidez, las primas de incumplimiento y los efectos impositivos. Todos estos aspectos complican las estimaciones generando mucho ruido en la magnitud que se quiere realmente observar. Por ejemplo, con respecto a la liquidez, los bonos en circulación de reciente emisión se venden generalmente a precios ligeramente superiores a los de otras emisiones de similar vencimiento, lo que refleja una prima de liquidez. En suma, un modelo de la ETTI completo debería considerar los precios de todas las emisiones que se encuentran en circulación puesto que se verá menos afectado por consideraciones de oferta y demanda de una emisión particular.
- *La imposición diferencial.* Las diferentes tasas impositivas sobre las rentas y las ganancias de capital, siendo las anteriores superiores a estas últimas, inducen a los inversores a preferir bonos con bajo cupón, lo que se transforma en precios superiores para dichos bonos que aquellos con cupón alto.

3. Procedimientos para estimar la estructura temporal de tipos de interés

Un buen método de estimación de la ETTI requiere las siguientes características que se consideran esenciales a la hora de recoger el fenómeno de dependencia de los tipos de interés respecto a su vencimiento:

- Un adecuado ajuste de los datos que proporciona el mercado.
- Los tipos al contado (o *spot*) y los tipos a plazo implícito (o *forward*) estimados permanecen positivos en todo el espectro de vencimientos.
- Las curvas estimadas deben ser continuas y suaves tal como recogen las teorías al uso sobre la ETTI.
- Debe existir una convergencia asintótica para vencimientos a muy largo plazo.

Por otra parte, también es esencial una adecuada selección en la muestra de bonos que se consideran en la estimación de la ETTI. En este sentido, se han producido grandes

6. Los *strips* (*Separate Trading of Register Interest and Principal*) son instrumentos financieros con rendimiento implícito creados a partir de la segregación de los flujos que originan los Bonos y Obligaciones del Estado. Estos bonos cupón cero son atractivos para inversores a largo plazo como los fondos de pensiones y compañías de seguros, y su propósito fundamental es asegurar un rendimiento en un horizonte de inversión a largo plazo.

avances en los criterios de filtrado para la selección de la muestra de bonos, cuya característica principal es que todos los bonos seleccionados han de ser de la misma clase de riesgo. En resumen, si se dispone de numerosos bonos pueden ignorarse tanto los bonos de muy baja liquidez, como los bonos con una horquilla de precios (*bid-ask*⁷) inusualmente alta. Asimismo, los bonos seleccionados para la muestra deben tener un tratamiento fiscal tan homogéneo como sea posible. Finalmente, también deben excluirse los bonos cuyo precio se encuentre distorsionado por la existencia de opciones inmersas (bonos re-comprables o con amortización anticipada o con redención anticipada).

4. Estimación de la estructura temporal de tipos de interés

A continuación, se hará un recorrido histórico exponiendo los principales métodos de estimación de la ETTI que se pueden distinguir en tres grandes apartados:

- *Bootstrapping.*
- Procedimientos directos de regresión.
- Procedimientos de suavizado.

4.1. *Bootstrapping*

El *bootstrapping* es el procedimiento para generar precios de bonos cupón cero a partir de bonos con cupón, donde los valores que se obtienen no son valores reales del mercado sino valores de bonos cupón cero consistentes con el conjunto de precios del mercado de los bonos con cupón. Este procedimiento se basa en la idea de que si se conoce la estructura temporal completa de los bonos cupón cero es fácil encontrar el precio de emisión de un bono con cupón (de valor facial 1).

$$P_{cn} = \frac{C}{(1+R_1)} + \frac{C}{(1+R_2)^2} + \dots + \frac{C+1}{(1+R_n)^n} = P_1C + P_2C + \dots + P_n(1+C) \quad (1)$$

donde $R_t \equiv R(0,t)$ es el tipo *spot* de rendimientos para los pagos del periodo t-ésimo, contratado en el periodo 0 y $P_t = 1/(1+R_t)^t$ es el precio de un bono cupón cero con vencimiento en el instante t.

El *bootstrapping* permite extraer el tipo *spot* a partir de bonos con cupón gracias a argumentos de no arbitraje, incluso cuando cierto bono cupón cero no se negocie en el mercado. Tanto es así que si se conoce una estructura temporal completa de bonos con cupón, es decir los precios $P_{C1}, P_{C2}, \dots, P_{Cn}$, es posible obtener la estructura cupón cero a través de dicho *bootstrapping*, donde el valor asignado a un bono con cupón debe ser igual al valor del paquete de bonos cupón cero construido con el flujo de pagos obtenido a través de los cupones y del nominal. Este principio da lugar al siguiente sistema de ecuaciones:

7. La horquilla de precios de compra y venta está formada por la suma de tres costes no observables: el coste de selección adversa que recoge la prima que exige el *dealer* por posibles pérdidas al enfrentarse en el mercado con otros agentes que puedan estar más informados que él, el coste de gestión de inventario y la comisión.

$$P_{C_1} = P_1 (1 + C)$$

$$P_{C_2} = P_1 C + P_2 (1 + C)$$

$$P_{C_n} = P_1 C + P_2 C + \dots + P_n (1 + C) \quad (2)$$

La solución del anterior sistema permite obtener recursivamente los precios P_i de los bonos cupón cero a partir de los precios P_{C_i} de los bonos con cupón.

$$P_i = \frac{P_{C_i} - P_{i-1}C - \dots - P_1 C}{(1 + C)}, i = 1, \dots, n \quad (3)$$

Por su sencillez, el *bootstrapping* tiene dos grandes limitaciones. En primer lugar, sobre ajusta la estimación pues calcula una curva de tipos cupón cero que ajusta perfectamente los precios de los bonos. Esto no es conveniente porque los precios de los bonos contienen, a menudo, errores idiosincráticos que no reflejan el mercado como un todo, sino las peculiaridades de un bono específico. Así, el precio de un bono particular puede reflejar consideraciones de liquidez (dificultades para comprar o vender el bono, dificultades para encontrarlo), *bid-ask spread* (horquilla entre precios de compra y venta), efectos fiscales, etc. En consecuencia, la estructura temporal que ofrece la observación directa del mercado será ruidosa y no necesariamente suave, y será necesario el uso de técnicas de suavizado para mitigar ese ruido. Por otra parte, el *bootstrapping* requiere ajustes *ad-hoc* cuando el número de bonos no sea igual al número de vencimientos y cuando los cupones no se reciben en las mismas fechas del *bootstrapping*. En tal caso, los factores de descuento solo se calculan para periodos que son múltiplos de seis meses o de un año, dependiendo de la frecuencia de pagos de cupón de los bonos. Así pues, para encontrar la estructura en vencimientos intermedios es preciso recurrir a procedimientos de interpolación que suavicen el ruido de los datos, tal como se analizará a continuación.

4.2. Procedimientos directos de regresión

Existen diferentes procedimientos directos de regresión que, históricamente, han intentado estimar la relación entre el tipo de interés y su vencimiento empleando para ello datos empíricos. Entre ellos, se puede destacar el modelo de Bradley y Crane (1973). En este modelo, simplemente, se ajustan las ecuaciones:

$$\ln(1 + R_i) = a + b_1 T_i + b_2 \ln(T_i), i = 1, \dots, k$$

donde R_i es el rendimiento de cierto bono, T_i su vencimiento y k el número de bonos de la muestra. Sin embargo, esta curva tiene el defecto de no tener en cuenta el sesgo introducido por el cupón, la imposición diferencial o la prima por amortización anticipada.

Por otro lado, el modelo de Echols y Elliot (1976) ajusta las ecuaciones:

$$\ln(1 + R_i) = a + b_1 (1/T_i) + b_2 T_i + b_3 C_i, i = 1, \dots, k$$

donde C_i es el cupón del bono i -ésimo, por lo que esta ecuación es aplicable a bonos con cupón. Una vez estimados los coeficientes de la ecuación i , la estructura temporal se obtendrá haciendo que el cupón C_i sea cero.

Finalmente, se considera el modelo de Carleton y Cooper (1976). En este caso, para un conjunto de bonos $i = 1, \dots, k$ con precios P_i y cupón c_{it} , los factores de descuento δ_t pueden ser estimados como coeficientes en una regresión lineal, usando los cupones de los bonos como variables independientes y el precio de los bonos como variable dependiente, es decir, ajustando las ecuaciones:

$$P_i = c_{i1}\delta_1 + c_{i2}\delta_2 + \dots + c_{iT}\delta_T + \varepsilon_i, i = 1, \dots, k$$

Estos autores encontraron una gran cantidad de bonos que pagaban cupones en las mismas cuatro fechas del año, por lo que la matriz $C = (c_{it})$ no tenía demasiados ceros, y recurrieron a la estimación por Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO)

$$\hat{\delta} = (C' C)^{-1} C' P$$

Pese a todo, tal regresión tiene el problema de tener tantos parámetros como fechas de pago de cupón, es decir, no hay nada que regularice los factores de descuento encontrados en la regresión. Además, cada factor de descuento solo se encuentra relacionado por coincidencia con aquellos de similar vencimiento. De este modo, se estima una función de descuento discontinua con un conjunto extremadamente dentado tipos *spot* y *forward*. Otro inconveniente de dicho modelo es que no tiene en cuenta que los precios de los bonos son observados con errores idiosincráticos debido a la falta de liquidez, horquilla entre precios de compra y venta (*bid-ask spread*), efectos de impuestos, etc. Así, los términos de error pueden incrementarse con el vencimiento de los bonos, ya que vencimientos más largos tienen una horquilla de precios de compra y venta más amplia y liquidez más baja. Debido a la heterocedasticidad de estos errores, la estimación directa por mínimos cuadrados ordinarios ajusta bien para vencimientos largos pero es muy pobre para vencimientos cortos.

En conclusión, los procedimientos directos de regresión se consideran inadecuados para modelizar la curva de tipos de interés.

4.3. Procedimientos de suavizado

La aproximación tradicional de calcular directamente (por *bootstrapping* o mediante procedimientos directos de regresión) los factores de descuento y las curvas al contado (o *spot*) tiende a producir curvas a plazos implícitos (o *forward*) muy dentadas debido a la escasez de datos en los vencimientos altos. Por ello, se precisan procedimientos de filtrado del ruido de los datos. En este sentido, McCulloch (1971) realizó un trabajo pionero empleando *splines*⁸ cuadráticos para estimar la función de descuento. Ello condujo, no obstante, a curvas *forward* con demasiados «chinchones». Por esta razón, McCulloch (1975) modifica su metodología aplicando *splines* cúbicos. No obstante, los *splines* producen

8. En el apartado 4.3.2 se explicará cómo funcionan los *splines*.

curvas *forward* con propiedades irrealistas en el tramo de vencimientos largos, donde se pueden producir agudas caídas o subidas en la curva de tipos. Por esta razón, se han desarrollado otros métodos de suavizado que evitan la oscilación de las tasas *forward*.

Una aproximación de suavizado consiste de forma genérica en suponer que el descuento

$$d(t) = \frac{1}{[1 + R(0,t)]^t} \quad (d(t) = e^{-R(0,t)t}, \text{ en versión continua})$$

es una función del tiempo de vencimiento por medio de un pequeño número de parámetros: $d(t) = d(T)/a, b, \dots = d(T, \bar{a})$. La elección de la curva óptima requiere la elección óptima de unos pocos parámetros, \bar{a} , en lugar de un parámetro para cada fecha de pago de cupón. Con ello, se consiguen los mejores procedimientos de suavizado de los datos sesgados y ruidosos que proporciona el mercado. Hay que tener en cuenta que el mercado no suele proporcionar bonos cupón cero de vencimientos largos por lo que la ETTI debe estimarse empleando bonos con cupón. De modo genérico, la forma de ajustar los parámetros del modelo en el caso de bonos con cupón consiste en suponer que se quiere emplear un conjunto de bonos de precios P_1, \dots, P_k con vencimientos n_1, \dots, n_k , siendo además, la función de descuento de la forma $d(t, \bar{a})$. Por tanto, el precio teórico de un bono P_i de valor nominal N que paga unos cupones c_i en los instantes t_1, \dots, t_k será

$$\bar{P}_i(\bar{a}) = c_i d(t_1, \bar{a}) + \dots + c_i d(t_{n_i}, \bar{a}) + N \cdot d(t_{n_i}, \bar{a}), \quad i = 1, \dots, k \quad (4)$$

Hay dos formas de ajustar el vector de parámetros \bar{a} :

a) Minimizando los errores de precios:

$$\text{Min}_{\bar{a}} \sum_{i=1}^k (P_i - \bar{P}_i(\bar{a}))^2 \quad (5)$$

La minimización de los errores de precios puede conducir a grandes errores en las TIR para bonos que les falta poco tiempo hasta el vencimiento (Martellini et al., 2003). Ello se debe a un problema heteroscedástico de la suma de los errores de precios, derivado de que la sensibilidad del precio ante cambios de la TIR es igual a la duración⁹ del bono, y un cambio en la TIR produce un pequeño cambio en los precios de bonos de corta duración y un gran cambio en los precios de los bonos de larga duración (la forma de resolver estos problemas de heteroscedasticidad se describen en el Anexo A).

b) Minimizando los errores en la TIR:

En este caso, para cada bono disponible P_i se calcula su TIR, y_i , resolviendo las ecuaciones

$$P_i = \sum_{j=1}^{n_i} c_j e^{-y_j t_j} + N \cdot e^{-y_i n_i}, \quad i = 1, \dots, k$$

9. La duración de un bono, desarrollada por Macaulay (1938), es una medida del tiempo medio de espera del poseedor de un bono antes de recibir el flujo de pagos. Esta variable es clave para explicar la sensibilidad de los precios de los bonos a los cambios en los tipos de interés.

Por otra parte, sabemos que el precio teórico $\bar{P}_i(\bar{a})$ dará lugar a otra TIR, $y_i(\bar{a})$ con $i = 1, \dots, k$, donde la dependencia respecto a los parámetros es compleja. Por tanto, el vector de parámetros \bar{a} puede obtenerse resolviendo el problema de minimización

$$\text{Min}_{\bar{a}} \sum_{i=1}^k (y_i - y_i(\bar{a}))^2$$

que se acometerá empleando metodologías de optimización no lineales. Con este procedimiento de minimización de la TIR se logra tener en cuenta que los errores de los activos son más volátiles para vencimientos cortos, evitando así el sobreajuste en los vencimientos largos (ver Anexo A).

En la literatura relativa a procedimientos de suavizado se han considerado diferentes formas funcionales en la función de descuento que pueden dividirse, en primera instancia, entre métodos paramétricos y no paramétricos. Entre los métodos paramétricos cabe citar los polinomios cúbicos y los modelos parsimoniosos, y entre los métodos no paramétricos suelen citarse los polinomios a trozos (o *splines*) y los modelos de *splines suavizadores*. A continuación, se desarrollarán todos estos procedimientos.

4.3.1. Polinomios cúbicos

Los polinomios cúbicos aproximan la función de descuento mediante una función polinómica del tipo

$$d(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

donde t es el tiempo hasta el vencimiento. Por definición ocurre que $d(0) = 1$, por lo que la forma funcional polinómica se convierte en

$$d(t) = 1 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

Veamos como estimar los parámetros a_1, a_2 y a_3 de la función de descuento a partir de los precios de un conjunto de bonos. Supongamos que queremos valorar un bono que paga k cupones a intervalos regulares y de valor nominal N . En este caso, el precio teórico de dicho bono será

$$\bar{P} = C \cdot d(t_1) + C \cdot d(t_2) + \dots + (C + N) \cdot d(t_k)$$

Sustituyendo ahora la función de descuento en la expresión del precio teórico del bono resulta

$$\bar{P} = C \cdot (1 + a_1 t_1 + a_2 t_1^2 + a_3 t_1^3) + \dots + (C + N) \cdot (1 + a_1 t_k + a_2 t_k^2 + a_3 t_k^3)$$

Si reordenamos esta última expresión obtenemos:

$$\bar{P} = N + k \cdot C + a_1 (C t_1 + \dots + (C + N) t_k) + a_2 (C t_1^2 + \dots + (C + N) t_k^2)$$

o bien

$$\bar{P} - (N + k \cdot C) = a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3$$

donde el precio de mercado del bono será

$$P = \bar{P} + \varepsilon = (N + k \cdot C) + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + \varepsilon$$

Por tanto, para estimar a_1 , a_2 y a_3 necesitaremos un conjunto de n bonos con precios P_i , valores faciales M_i , vencimientos N_i y cupones C_i , obteniendo así

$$P_i = \bar{P}_i + \varepsilon_i = (N_i + k_i \cdot C_i) + a_1 X_{i1} + a_2 X_{i2} + a_3 X_{i3} + \varepsilon_i, \text{ para } i = 1, \dots, n \quad (7)$$

lo que permite estimar los coeficientes a_1 , a_2 , a_3 por mínimos cuadrados ordinarios.

Desde el punto de vista estrictamente matemático, sobre un intervalo cerrado cualquier función continua puede ser aproximada por medio de un polinomio de grado suficientemente grande. Sin embargo, los polinomios de alto grado tienen graves inconvenientes como funciones de regresión, pues son muy inestables si se desea emplearlos para estimar funciones de descuento. Esto se debe a que pequeños cambios en los datos pueden tener un impacto significativo a nivel no local, es decir, un cambio en un solo dato en los primeros vencimientos puede acarrear un gran impacto en los vencimientos grandes, algo que resulta a todas luces indeseable. Una forma de evitar este problema es mediante el empleo de polinomios a trozos (o *splines*) donde un polinomio de alto orden se aproximará localmente por trozos de polinomios, como veremos a continuación.

4.3.2. Polinomios a trozos: *splines* de McCulloch (1971, 1975)

Un trabajo pionero en el empleo de polinomios a trozos, o *splines*, en la estimación de la ETTI fue el propuesto por McCulloch (1971, 1975) donde los polinomios a trozos se utilizan para ajustar la función de descuento o los tipos cupón cero. Esta metodología resulta muy flexible pues permite diferentes conjuntos de parámetros para diferentes vencimientos (corto, medio y largo). Por ejemplo, si nos centramos en la función de descuento, esta se estima como una función *spline*, siendo una función *spline* de orden r sobre un intervalo finito una función polinómica de orden r a trozos, con $r - 1$ derivadas continuas y cuya derivada de orden r tendrá discontinuidades de salto. Así, los diferentes segmentos de la función se ensamblarán de forma suave en unos umbrales denominados nudos. Si se tiene en cuenta el supuesto de capitalización continua, la función de descuento, $\delta(t) = e^{-Rt}$, a estimar adopta la siguiente forma, suponiendo que varía suavemente con el plazo de vencimiento

$$\delta(t) = 1 + a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + \dots + a_j f_j(t)$$

Con el fin de que $\delta(t)$ sea una función *spline*, la base de funciones $f_j(t)$ que van a generar la función de descuento serán de dos tipos, o bien funciones polinómicas $f_j(t) = t^j$, o bien funciones de potencias truncadas (fig. 3), es decir, $f_j(t) = (t - n)_+^j$, donde

Estas últimas funciones son las que permitirán que los diferentes trozos de polinomios se solapen con suavidad en el punto n . Por tanto, una función *spline* de orden r tiene la siguiente forma,

$$\delta(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_r t^r + \beta_1 (t - n_1)_+^r + \dots + \beta_k (t - n_k)_+^r$$

donde los puntos n_1, \dots, n_k dentro de un intervalo cerrado $[a, b]$ con $[a < n_1 < \dots < n_k < b]$ se denominan nudos y son los

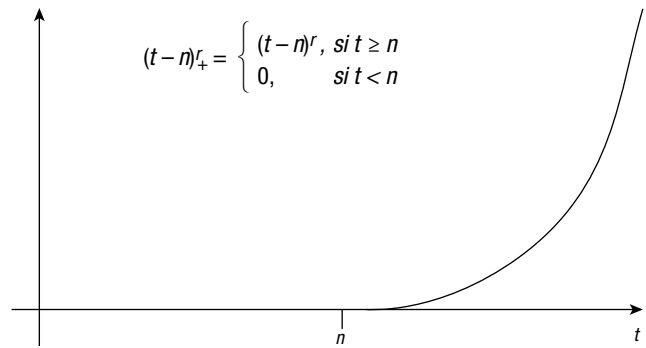


Figura 3 Funciones de potencias truncadas.

puntos donde se ensamblan los diferentes trozos de los polinomios. Como $(t - n_j)_+^r$ tiene las $r - 1$ primeras derivadas nulas en n_j , es fácil comprobar que la función $\delta_t = \delta(t)$ cumple las tres propiedades siguientes:

1. $\delta(t)$ es un polinomio a trozos de orden r en cualquier $[n_i, n_{i+1})$.
2. $\delta(t)$ tiene las primeras $r - 1$ derivadas continuas.
3. $\delta(t)$ tiene una derivada r -ésima discontinua con saltos en n_1, \dots, n_k .

A consecuencia de las propiedades anteriores, los *splines* cúbicos son polinomios a trozos con las dos primeras derivadas continuas, donde en el caso de k nudos, la función a trozos se obtiene como combinación lineal de la base

$$1, t, t^2, t^3, (t - n_i)_+^3, \quad \text{con } i = 1, \dots, k$$

Por ejemplo, en el caso concreto de un *spline* cúbico con dos nudos, la expresión matemática de esta aproximación será de la forma:

$$\delta(t) = \begin{cases} a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 & 0 \leq t < n_1 \\ b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 & n_1 \leq t < n_2 \\ c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 & n_2 \leq t < T \end{cases}$$

Puede observarse que el segundo trozo $b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3$, en el intervalo $n_1 \leq t < n_2$, se corresponde con la función *spline* $\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 + \beta_1 (t - n_1)_+^3$. Mientras que el tercer trozo se corresponde con la función *spline* $\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 + \beta_1 (t - n_1)_+^3 + \beta_2 (t - n_2)_+^3$.

Los *splines* cúbicos pueden aplicarse en la estimación de la función de descuento, de la curva de tipos *spot*, del logaritmo de los precios de los bonos cupón cero o de transformaciones similares. En este sentido, McCulloch (1971, 1975) aplicó los *splines* cúbicos directamente sobre precios de bonos, aunque poco después Shea (1984) observó que esto conduce a inestabilidad en los tipos *spot* y *forward*.

Los elementos claves para un buen ajuste a través de los *splines* son la elección del número de nudos y su posición, siendo estos unos problemas abiertos de extrema complejidad que ha dado lugar a diversos estudios. Dentro de estos se puede citar a Kanony y Mokrane (1992) y Deacon y Derry (1994) quienes señalan que cuanto mayor sea el número de nudos del *spline*, mejor será el ajuste en términos de la varianza de los residuos pero la curva será más fluctuante, así,

el número de nudos actúa como parámetro de suavizado. Es decir, cuantos más nudos, la ETTI recogerá mejor las posibles jorobas, si existen, pero tendrá un comportamiento más fluctuante. También ha de tenerse en cuenta que cuando el número de nudos del *spline* se incrementa demasiado se produce sobreparametrización, y la estimación de la ETTI tenderá a ser mucho más sensible a los datos anormales en el sentido que memoriza el conjunto muestral pero pierde su carácter predictivo. A medida que disminuye el número de nudos del *spline*, más suave será la curva estimada. Sin embargo, cuando el número de nudos del *spline* es demasiado pequeño, la introducción de una pequeña perturbación produce errores significativos, lo que implica que una baja calidad del ajuste. En este sentido, McCulloch (1971) y Shea (1984) proponen tomar como número de nudos interiores a la raíz cuadrada del número de vencimientos observados menos dos, es decir, $k \cong \sqrt{T} - 2$.

Otros autores han propuesto con posterioridad otros criterios en la selección del número de nudos. Así, Waggoner (1997) propone tomar como número óptimo de nudos el número entero más próximo a un tercio del total de activos sobre los que se ajusta la ETTI. No obstante, Fisher et al. (1995) consideran que el número óptimo de nudos podría obtenerse minimizando la función de pérdida dividida entre el número de parámetros efectivos del modelo.

Por su parte, Priaulet (1997) sugiere usar una regla intuitiva establecida en la dispersión entre dos estadísticos \bar{E}_{min} y \bar{E}_{verif} basados en la raíz del error cuadrático medio de predicción sobre dos conjuntos de información, uno de estimación y otro de verificación. La expresión sería

$$\bar{E}_{min} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (P_t^j - \hat{P}_t^j)^2}{n}}$$

Para asegurar la robustez del ajuste, no es suficiente usar bonos del conjunto de referencia usado en el proceso de optimización, sino que es deseable también considerar otro conjunto de referencia usado para la verificación. En este conjunto se calcula de forma similar \bar{E}_{verif} considerando el 0,15% del precio, siendo esta una aproximación de la horquilla de precios de compra y venta (*bid-ask spread*). Por lo tanto, la regla de decisión para determinar el número de nudos es la siguiente:

- Si ambos estadísticos no son menores que el 0,15%, entonces incrementar el número de nudos hasta que lo sean.
- Si ambos estadísticos son menores que el 0,15%, entonces calcular la diferencia $\bar{E}_{min} - \bar{E}_{verif}$. Si dicha diferencia es «grande», entonces concluimos que, probablemente, el número de nudos es demasiado alto. En cambio, si la diferencia es «pequeña» (en torno a 0,02% o 0,03% del precio), el número de nudos puede ser considerado adecuado.

Priaulet propone en su implementación excluir los bonos ilíquidos del conjunto de referencia, porque tales bonos implican típicamente estadísticos muy grandes que no persisten en el tiempo.

Por otro lado, la elección óptima de la posición de los nudos es un asunto extremadamente delicado. En este sentido, Deacon y Derry (1994) muestran que los cambios en la elección de los nudos implican cambios significativos en el nivel de la curva *forward* (de hasta de 13 puntos básicos).

En los trabajos seminales sobre la estimación de la ETTI por medio de *splines* (McCulloch, 1971, 1975, y Shea, 1984) se considera que dentro de cada intervalo $[n_i, n_{i+1}]$ entre dos nudos debe haber igual número de vencimientos. Alternativamente, Priaulet (1997) señala que la elección de los nudos debería reflejar una segmentación natural en el mercado de bonos. Concretamente, para el mercado de Bonos del Tesoro francés, considera cuatro segmentos: a corto plazo (un día-un año), a medio plazo (un año-siete años), a largo plazo (siete años-diez años) y a muy largo plazo (diez años-treinta años). Finalmente, Fernández-Rodríguez (2006) ha propuesto un procedimiento de selección automática de la posición de los nudos por medio de un algoritmo genético que consigue mejorar considerablemente el ajuste de la curva *spot* y de la función de descuento.

Entre las críticas al empleo de los *splines* como procedimiento para la estimación de la ETTI, se pueden considerar las siguientes (ver Vasicek y Fong, 1982; Shea, 1985, y Fernández-Rodríguez, 2006):

- La función de descuento es muy sensible a la colocación de los nudos.
- Si se emplean demasiados nudos, la ETTI puede presentar formas muy curvadas en los vencimientos más alejados.
- La regresión por medio de los mínimos cuadrados ordinarios usada para la estimación de los parámetros da el mismo peso a los errores en los precios de los bonos con características heterogéneas tales como liquidez, *bid-ask spreads*, vencimiento, etc. Ello impone realizar correcciones por heteroscedasticidad.
- Las tasas *forward* que se derivan de los tipos *spot* o las funciones de descuento estimadas suelen ser muy inestables y oscilantes, particularmente en los vencimientos largos donde debería tender hacia una convergencia asintótica. Ello se debe a la incapacidad de los polinomios para describir comportamientos asintóticos.

Vasicek y Fong (1982) intentan evitar este último problema estimando una función de descuento por medio de un *spline exponencial* de tercer orden, es decir, una función que entre dos pares de nudos tiene la forma

$$\delta(t) = b_0 + b_1 e^{-2\alpha t} + b_2 e^{-3\alpha t}.$$

No obstante, Shea (1985) ha indicado que los *splines* exponenciales no producen una estimación más estable que los *splines* polinómicos, sugiriendo los B-*splines*¹⁰ para evitar la pérdida de precisión debida a la falta de observaciones al final de la curva de tipos.

4.3.3. Modelo de Nelson y Siegel (1987)

Nelson y Siegel (1987), en su trabajo seminal, parametrizan la curva *forward* de vencimiento t de la siguiente forma

$$f_t = \beta_0 + \beta_1 e^{-t/\tau} + \beta_2 \frac{t}{\tau} e^{-t/\tau} \quad (9)$$

10. Un B-*spline* es una función *spline* que tiene el mínimo apoyo con respecto a un determinado grado, suavidad y partición del dominio, es decir, en lugar de «seguir» los puntos de pegue entre diferentes nudos, como hace el *spline*, este los utiliza como puntos de apoyo (ver De Boor, 1978).

Esta especificación permite capturar con tan solo cuatro parámetros distintas formas de la ETTI (plana, con pendiente positiva o negativa y con más o menos curvatura). Esta función *forward* (9) es una combinación lineal de tres funciones o *factor loadings*

$$f_1 = 1; f_2 = e^{-t/\tau}; f_3 = \frac{t}{\tau} e^{-t/\tau} \quad (10)$$

donde la función f_1 es la componente a largo plazo, siendo responsable de que los tipos *forward* converjan al nivel asintótico β_0 ; también es conocida como la componente del nivel de la curva de tipos de interés. Por su parte, la función f_2 , que es monótona decreciente, representa la componente a corto plazo que regula el crecimiento ($\beta_1 < 0$) o decrecimiento ($\beta_1 > 0$) de la ETTI; también se conoce como la componente de la pendiente de la curva de tipos de interés, donde el parámetro τ describe el ritmo de crecimiento de la función f_2 . Es decir, cuanto más elevado sea τ , menor es el crecimiento de f_2 y menor el ritmo de convergencia de los tipos *forward* a nivel asintótico, y viceversa. Por último, la función f_3 es el componente a medio plazo de la ETTI que se describe por medio del parámetro β_2 ; a esta también se la conoce como la componente de la curvatura de la ETTI. En consecuencia, si $\beta_2 > 0$ la curva *forward* tiene un máximo interior adoptando con ello un perfil cóncavo; y si $\beta_2 < 0$ la curva *forward* tiene un mínimo interior adoptando con ello un perfil convexo. En ambos casos, el parámetro τ influye en la cercanía o lejanía temporal con que se presenta el máximo o mínimo interior. En este sentido, Diebold y Li (2006) interpretan al parámetro τ como el valor que maximiza a la función f_3 , o lo que es lo mismo, el vencimiento dónde se encuentra situado el máximo interior de la ETTI.

Dada la relación entre los tipos *spot*, R_t , y los tipos *forward*, f_t , descrita por la ecuación

$$R_t = \frac{\int_0^t f(s) ds}{t}$$

los tipos *spot* consistentes con los tipos *forward* del modelo de Nelson y Siegel en la ecuación (9) son

$$R_t = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \frac{t}{\tau} (1 - e^{-t/\tau}) - \beta_2 e^{-t/\tau} \quad (11)$$

Reinterpretando los parámetros para la curva *spot*, se observa que $\beta_0 + \beta_1 = R_{t=0} = f_{t=0}$ es el tipo de interés instantáneo, próximo al valor gubernamental del dinero. Por otra parte, $\beta_0 = R_{t=\infty} = f_{t=\infty}$ es el tipo a muy largo plazo o tipo del bono consolidado, es decir, el valor asintótico de la estructura temporal para los tipos cupón cero y *forward* instantáneos. Por tanto, la diferencia entre la tasa instantánea a muy largo plazo y la tasa instantánea a muy corto plazo, $\beta_0 - (\beta_0 + \beta_1) = -\beta_1$, es la pendiente de la ETTI¹¹. Por último, el parámetro β_2 representa la curvatura de la función *spot*, y τ la velocidad de convergencia entre los tipos de interés a corto y largo plazo.

11. Debemos tener en cuenta que la pendiente en el modelo de Nelson y Siegel se interpreta de tal forma que un $\beta_1 > 0$ representa una pendiente negativa y un $\beta_1 < 0$ representa una pendiente positiva.

Por otra parte, dada la relación entre el tipo de descuento y el tipo *spot* mediante la expresión $\delta(t) = e^{-R_t t}$, si se sustituye en la fórmula (11) proporciona la siguiente expresión para la función de descuento

$$\delta(t) = e^{-(\beta_0 t + \tau(\beta_1 + \beta_2)(1 - e^{-t/\tau}) - \beta_2 t e^{-t/\tau})} \quad (12)$$

Finalmente, si incluimos la función de descuento (12) en un bono con cupón, resulta la siguiente fórmula (13) que permite la valoración teórica de un bono

$$\bar{P}_i = \sum_{s=1}^m c_s \delta(t_s) = \sum_{s=1}^m c_s e^{-(\beta_0 t + \tau(\beta_1 + \beta_2)(1 - e^{-t/\tau}) - \beta_2 t e^{-t/\tau})} \quad (13)$$

donde, c_s es el flujo s pagado en el instante t para un activo que paga un número total de m cupones periódicos (en España es usual que los cupones sean pagados anualmente), más el valor nominal al vencimiento. Por tanto, la fórmula (13) permite estimar los parámetros del modelo de Nelson y Siegel a partir de los precios de mercado de los bonos. Con el fin de evitar problemas de heteroscedasticidad en la estimación, es frecuente dividir cada error entre su duración (ver Martellini et al., 2003, y Díaz et al., 2009). De esta forma, los parámetros del modelo de Nelson y Siegel se estiman mediante el siguiente programa de optimización

$$\text{Min}_{\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau} \sum_{i=1}^k \frac{S_i^2}{D_i} = \text{Min}_{\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau} \sum_{i=1}^k \frac{(P_i - \bar{P}_i)^2}{D_i} \quad (14)$$

con las restricciones $\beta_0 > 0$, $\beta_0 + \beta_1 > 0$, y $\tau > 0$. En la expresión (14), k representa el número de activos escogidos para ajustar la ETTI, P_i es el precio de mercado, \bar{P}_i es el precio teórico según la ecuación (13), y D_i es la duración de Macaulay¹² (1938). Dada la complejidad del programa (14), para estimar sus parámetros es preciso el empleo de metodologías no lineales.

Según el valor que tomen los parámetros del modelo de Nelson y Siegel, $\{\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau\}$, este será capaz de generar la gran variedad de formas en la ETTI descritas anteriormente con un comportamiento asintótico adecuado tanto para la curva *spot* como para la *forward*.

Por otro lado, Svensson (1994, 1995) ha extendido el modelo de Nelson y Siegel con parámetros extra que le proporcionan gran flexibilidad, siendo capaz de modelizar curvas con más de una joroba. Concretamente, la función *forward* del modelo de Svensson viene dada por la expresión

$$f_t = \beta_0 + \beta_1 e^{-t/\tau_1} + \beta_2 \frac{t}{\tau_1} e^{-t/\tau_1} + \beta_3 \frac{t}{\tau_2} e^{-t/\tau_2} \quad (15)$$

donde los parámetros $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ y τ_1 tienen la misma interpretación que en Nelson y Siegel. Por su parte, el parámetro «extra», β_3 , permite que la ETTI desarrolle una segunda cur-

12. La duración de Macaulay (1938) se define como el promedio ponderado de los vencimientos entre el precio del bono de forma que la combinación lineal sea convexa,

$$D = \frac{\frac{C_1}{(1+y)} + 2 \frac{C_2}{(1+y)^2} + \dots + T \frac{C_T + N}{(1+y)^T}}{P} = \sum_{t=1}^T t \cdot wt,$$

donde el factor que se aplica a cada vencimiento $w_t = \frac{C_t(1+y)^{-t}}{P}$ es el valor presente del correspondiente bono cupón cero entre P .

vatura, logrando así ajustar curvas con una mayor complejidad que con el modelo de Nelson y Siegel. Igualmente que para τ_1 , el parámetro τ_2 representa el valor que maximiza a la segunda curvatura, es decir, en este caso a la función o factor loading $f_4 = \frac{t}{\tau_2} e^{-t/\tau_2}$.

Siguiendo a Anderson y Sleath (2001), los modelos paramétricos de estimación de la ETTI tienen una serie de inconvenientes respecto a los no paramétricos. Su principal crítica hace referencia a que cuando se cambia una sola observación en el tramo largo, las curvas de Nelson y Siegel o Svensson pueden cambiar dramáticamente, particularmente en los vencimientos cortos. En cambio, los *splines* son más flexibles pues no adolecen de este defecto debido a la flexibilidad que introduce su forma funcional basada en segmentos individuales que pueden moverse casi de forma independiente unos de otros. Además, un problema adicional que aparece en los modelos paramétricos es la colinealidad que se presenta entre los regresores $\frac{t}{\tau_1} e^{-t/\tau_1}$ que introducirá serios problemas de estimación máximo verosímil o por mínimos cuadrados ordinarios.

4.3.4. Splines suavizadores

Los procedimientos de ajuste de *splines* de regresión tienen el inconveniente de que al aumentar el número de nudos, si bien mejora el ajuste, se puede producir sobreparametrización y una gran tendencia a la oscilación de la curva *forward* estimada. Por tanto, parece razonable que los tipos de interés para vencimientos largos (a partir de diez años) deban ser muy similares, con la consecuente estabilidad de los tipos *forward* implícitos para vencimientos largos. Por otra parte, un reducido número de nudos puede disminuir la flexibilidad y el ajuste, obteniendo unas curvas muy poco realistas que no reflejan fielmente la información sobre la estructura de tipos de interés. En este sentido, han surgido diferentes propuestas en la literatura con el objetivo de controlar las oscilaciones en las curvas estimadas. La idea principal de todos ellos ha consistido en añadir un término de penalización a la curvatura de la función *spot* o *forward* en la función objetivo a minimizar, desarrollándose así los denominados *splines suavizadores*. Los *splines suavizadores* atenúan el nivel de oscilación de la ETTI por medio de un parámetro que controla la tasa de intercambio entre la bondad de ajuste y la suavidad de la curva. En este sentido, puede destacarse el trabajo de Fisher et al. (1995) quienes han considerado un método de estimación no paramétrica por medio de un modelo *spline* suavizado con la siguiente función objetivo

$$\sum_{i=1}^k (P_i - \bar{P}_i(\bar{a}))^2 + \lambda \int_0^{t_k} (\theta''(t))^2 dt$$

donde k es el número de bonos en la muestra, t_k es el vencimiento máximo de dichos bonos y $\theta(t)$ es la función que se pretende estimar, que puede ser la función de descuento, la curva *forward* o la curva *spot*¹³. En estos, el nivel de oscilación de la curva se vigila por medio del parámetro λ , quien

13. Es preciso aclarar que Fisher et al. (1995) permite la estimación de los precios teóricos, $P_i(\bar{a})$, a través de la función de descuento, *spot* o *forward*, es decir que \bar{a} representa a los parámetros del *spline* que estiman dicha función.

controla la tasa de intercambio entre la bondad del ajuste y la suavidad de la curva estimada. Concretamente, Fisher et al. (1995) parten de un número de nudos elevado, y gracias a λ , reducen su número evitando la sobreparametrización. Así, el número de nudos no es un parámetro crucial del modelo porque se parte de *splines* con un gran número de ellos para garantizar suficiente flexibilidad y curvatura. Estos autores obtienen el número óptimo de nudos minimizando la ratio de su medida de bondad del ajuste y el número de parámetros, magnitud que ellos llamaron «*Generalized Cross Validation*» (GCV). Así se penaliza la presencia de parámetros que no contribuyen significativamente al ajuste.

De forma similar, Waggoner (1997) ha propuesto un procedimiento modificado de *splines* suavizadores que permite distinto grado de penalización ante la variabilidad de la curva a estimar según el vencimiento de los bonos. Este autor aconseja variar las penalizaciones entre vencimientos, y fijarlas de ante mano en lugar de optimizarlas sobre la propia función objetivo. Ello es conveniente porque permite que las curvas ajustadas sean más flexibles y variables en los vencimientos a corto plazo que a largo plazo. Así, la curva *forward* estimada será la que minimiza la función objetivo

$$\sum_{i=1}^k (P_i - \bar{P}_i(\bar{a}))^2 + \int_0^{t_k} \lambda(t) (\theta''(t))^2 dt$$

siendo

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0.1 & 0 \leq t < 1 \\ 100 & 1 \leq t < 10 \\ 1000 & t \geq 10 \end{cases}$$

donde t está medido en años y siendo $\theta(t)$ la función *forward*. Waggoner demostró que su metodología mejoraba a la propuesta por Fisher et al. (1995). Finalmente, también cabría destacar los trabajos de Anderson y Sleath (1999, 2001), quienes propusieron una modificación del método de Waggoner considerando una función objetivo de la forma

$$\sum_{i=1}^k \left(\frac{P_i - \bar{P}_i(\bar{a})}{DM_i} \right)^2 + \int_0^{t_k} \lambda(t) (\theta''(t))^2 dt \quad (19)$$

siendo DM_i la duración modificada¹⁴ del bono y la función $\lambda(t)$ se supone de la forma

$$\log(\lambda(t)) = L - (L - S)e^{-t/\mu}$$

donde los parámetros L , S y μ permiten que la penalización varíe con el vencimiento. Anderson y Sleath (2001) no comentan nada sobre cuáles son los valores de dichos parámetros, pero de la tabla 2 de su artículo se puede deducir que $L = \log(10,000)$, $S = 0$ y $\mu = 1.44$, aproximadamente (Yallup, 2012). En esta metodología, la diferencia entre los precios de mercado y los precios teóricos de los bonos se pondera por la inversa de la duración modificada del bono. Con ello

14. La duración modificada de un bono tiene la siguiente expresión, $\frac{D}{(1+y)} = -\frac{dP}{dy} \frac{1}{P}$ donde P es el precio de un bono, y es la TIR de dicho bono y D es la duración de Macaulay (ver Martellini et al., 2003).

Tabla 1 Principales errores y métodos utilizados para la estimación de la estructura temporal de tipos de interés

Métodos de estimación de la ETTI en diferentes países		
Banco central	Error minimizado	Procedimiento de ajuste
Bélgica	Precios ponderados	Nelson y Siegel, Svensson
Canadá	Precios ponderados	Svensson
Finlandia	Precios ponderados	Nelson y Siegel
Francia	Precios ponderados	Nelson y Siegel, Svensson
Alemania	TIR	Svensson
Italia	Precios ponderados	Nelson y Siegel
Noruega	TIR	Svensson
España	Precios ponderados	Nelson y Siegel (antes de 1995), Svensson
Japón	Precios	<i>Smoothing splines</i> (Fischer-Nychka-Zervos)
Suecia	TIR	<i>Smoothing splines</i> (Fischer-Nychka-Zervos). Antes Svensson
Reino Unido	TIR	<i>Smoothing splines</i> (Anderson y Sleath). Antes Svensson
EE. UU.	<i>Bills</i> : precios ponderados Bonos: precios	<i>Smoothing splines</i> (Fischer-Nychka-Zervos)

ETTI: estructura temporal de tipos de interés; TIR: tasa interna de rendimiento.
Fuente: BIS (2005).

se pretende tener en cuenta el hecho de que los errores de los precios observados de los bonos son más volátiles para vencimientos cortos.

En resumen, las diferentes metodologías empleadas por los diferentes bancos nacionales para la estimación de la ETTI quedan reflejadas en la siguiente tabla (tabla 1).

5. Consideraciones finales

La ETTI se define como la relación funcional entre el tipo de interés nominal en los préstamos sin riesgo de la economía y el tiempo hasta su vencimiento, manifestando así la dependencia entre los tipos de interés y su plazo de amortización. Dado que en la práctica la ETTI no es directamente observable, se requiere el empleo de metodologías de suavizado de los errores idiosincráticos de una muestra de bonos dada (sesgo del cupón, problemas de liquidez, *bid-ask spread*, etc.) sobre la que se pretende ajustar la ETTI. En este sentido, hemos pretendido, con este trabajo, contribuir a la literatura existente ofreciendo un resumen de los procedimientos de estimación de la ETTI más empleados, permitiendo al lector mantenerse actualizado acerca de los últimos desarrollos en el estudio de la ETTI. Estos se han clasificado, históricamente, dentro de dos ramas de procedimientos de ajuste de la ETTI: los modelos paramétricos (Nelson y Siegel, 1987, y Svensson, 1994, 1995, entre otros) y los modelos no paramétricos (Fisher et al., 1995; McCulloch, 1971, 1975; Waggoner, 1997, entre otros).

El principal objetivo de cualquier procedimiento de ajuste de la ETTI es que la curva *spot* y/o la curva *forward* estimadas sean estables (sin muchas oscilaciones), ajusten bien la información del mercado (sin sobre ajustarla) y tengan convergencia en el largo plazo (los inversores no son capaces de distinguir entre, por ejemplo, los tipos de interés a veinte años y los tipos de interés a treinta años). Sin embargo, no todos los procedimientos de ajuste de la ETTI proporcionan el mismo tipo de curvas, obteniendo una serie de modelos un mejor ajuste a la información del mercado a

cambio de unas curvas *spot* y/o *forward* con mayor oscilación, y viceversa (Yallup, 2012).

Finalmente, con el objetivo de explicar las diferentes formas que puede tomar la ETTI, se han resumido sus diferentes hipótesis.

Financiación

Esta investigación ha recibido financiación del Ministerio de Ciencia y Educación de España a través del proyecto de investigación ECO2010-21318.

Agradecimientos

Los autores agradecen la ayuda financiera del Ministerio de Ciencia y Educación de España a través del proyecto de investigación ECO2010-21318. Igualmente, agradecen los comentarios y sugerencias del referee.

Anexo A. Corrección de la heterocedasticidad en la estimación de la estructura temporal de tipos de interés

Si la obtención del vector de parámetros \vec{a} se lleva a cabo mediante la simple minimización de los errores de precios

$$\text{Min}_{\vec{a}} \sum_{i=1}^k (P_i - \bar{P}_i(\vec{a}))^2$$

puede conducir a grandes errores en las TIR para bonos que les falta poco tiempo hasta el vencimiento. Este hecho es debido a un problema heteroscedástico de la suma de los errores derivado de que la sensibilidad del precio ante cambios de la TIR es igual a la duración del bono, y una alteración en la TIR produce un pequeño cambio en los precios de bonos de corto vencimiento y un gran cambio en los precios

de los bonos de largo vencimiento. Por tanto, si se ajustan los parámetros buscando minimizar la suma cuadrática de los errores, esto conducirá a que el modelo resultante resuelva el problema de minimización ajustando más los precios de bonos de largo vencimiento que los de corto vencimiento, es decir, sobreajustando los precios de los bonos de largo vencimiento (que pesan mucho en la suma de cuadrados) a expensas de los precios de los bonos de corto vencimiento (cuyos errores pesan muy poco en la suma de cuadrados). Este fenómeno va en contra de lo que un buen modelo de estimación de la ETTI debería de hacer, que es ser muy flexible y volátil en los vencimientos cortos, y menos volátil y más suave en los vencimientos largos. Para corregir este problema, se han producido numerosos avances en el esquema de pesos con los que se ponderan a los errores en los procesos de optimización que se emplean en la estimación de la ETTI. Concretamente, una forma de corregir este problema es ponderar los errores de precios de los bonos por la inversa de la duración D_i de cada bono

$$\text{Min}_{\bar{a}} \sum_{i=1}^k \left(\frac{P_i - \bar{P}_i(\bar{a})}{D_i} \right)^2$$

de esta forma, el tamaño de los sumandos no depende de su vencimiento.

Otra forma de corregir el problema anterior se obtiene minimizando los errores en las TIR (ver apartado 4.3).

Bibliografía

- Anderson, N., Sleath, J., 1999. New estimates of the UK real and nominal yield curves. Bank of England Quarterly Bulletin, November.
- Anderson, N., Sleath, J., 2001. New estimates of the UK real and nominal yield curves. Bank of England.
- BIS (Bank for International Settlements), 2005. Zero-coupon yield curves: Technical documentation. Bank for International Settlements, Basle.
- De Boor, C., 1978. A practical guide to splines. Springer-Verlag, New York.
- Bradley, S.P., Crane, D.B., 1973. Management of commercial bank government security portfolios: An optimization approach under uncertainty. Journal of Bank Research IV (1), 18-30.
- Campa, J.M., Chang, P.H.K., 1995. Testing the expectations hypothesis on the term structure of volatilities in foreign exchange options. Journal of Finance L (2), 529-47.
- Carleton, W.T., Cooper, I.A., 1976. Estimation and uses of the term structure of interest rates. Journal of Finance XXXI (4), 1067-1083.
- Culbertson, J.M., 1957. The term structure of interest rates. Quarterly Journal of Economics LXXI (4), 485-517.
- Deacon, M., Derry, A., 1994. Estimating the term structure of interest rates, 24. Bank of England.
- Díaz, A., González, M., Navarro, E., Skinner, F.S., 2009. An evaluation of contingent immunization. Journal of Banking and Finance XXXIII (10), 1874-1883.
- Diebold, F.X., Li, C., 2006. Forecasting the term structure of government bond yields. Journal of Econometrics CXXX, 337-364.
- Echols, M.E., Elliott, J.W., 1976. A quantitative yield curve model for estimating the term structure of interest rates, Journal of Financial and Quantitative Analysis XI, 87-114.
- Fernández-Rodríguez, F., 2006. Interest rate term structure modeling using free-knot splines. Journal of Business VXXIX (6), 3083-3099.
- Fisher, I., 1896. Appreciation and interest. MacMillan, New York.
- Fisher, M., Nychka, D., Zervos, D., 1995. Fitting the term structure of interest rates with smoothing splines. Finance and Economics Discussion Series, 95-1. Federal Reserve Board.
- Hicks, J.R., 1939. Value and capital. An inquiry into some fundamental principles of economic theory. Clarendon Press, Oxford.
- Kanony, C., Mokrane, M., 1992. Reconstitution de la courbe de taux d'évolution et couverture factorielle. Cahiers de la Caisse Autonome de Refinancement 1, June.
- Longstaff, F.A., 2000. The term structure of very short-term rates: New evidence for the expectations hypothesis. Journal of Financial Economics LVIII (3), 397-415.
- Macaulay, F., 1938. The movements of interest rates. Bond yields and stock prices in the United States since 1856. National Bureau of Economic Research, New York.
- Martellini, F.J.L., Priaulet, L.P., Priaulet, S., 2003. Fixed-income securities: Valuation, risk management and portfolio strategies. John Wiley & Sons, England.
- McCulloch, J.H., 1971. Measuring the term structure of interest rates. Journal of Business XLIV, 19-31.
- McCulloch, J.H., 1975. The tax-adjusted yield curve. Journal of Finance XXX, 811-830.
- Modigliani, F., Sutch, R., 1966. Innovations in interest rate policy. American Economic Review, Papers and Proceedings Supplement LVI, 178-197.
- Nelson, C., Siegel, A., 1987. Parsimonious modeling of yield curves. Journal of Business LX (4), 473-489.
- Pérez-Rodríguez, J.V., Borrell-Vidal, M., Torra-Porras, S., 2002. El ajuste a la curva de rendimientos o la estimación de la estructura temporal. Cuadernos de Economía XXV (69), 157-184.
- Priaulet, P., 1997. Structure par terme des taux d'intérêt: reconstitution, modélisation et couverture. Thèse de Doctorat en Sciences Economiques, Université Paris IX-Dauphine, Paris.
- Shea, G.S., 1984. Pitfalls in smoothing interest rate term structure data: Equilibrium models and spline approximations. Journal of Financial and Quantitative Analysis XIX (3), 253-269.
- Shea, G.S., 1985. Interest rate term structure estimation with exponential splines: A note. Journal of Finance XL (1), 319-325.
- Svensson, L.E.O., 1994. Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-1994. Seminar Paper – Institute for International Economic Studies, 579. University of Stockholm, Sweden.
- Svensson, L.E.O., 1995. Estimating forward interest rates with the extended Nelson & Siegel method. Quarterly Review, Sveriges Riksbank III, 13-26.
- Vasicek, O.A., Fong, H.G., 1982. Term Structure Modeling Using Exponential Splines, Journal of Finance. XXXVII, 339-348.
- Waggoner, D.F., 1997. Spline methods for extracting interest rate curves from coupon bond prices, 97-10. Federal Reserve Bank of Atlanta.
- Yallup, P.J., 2012. Models of the yield curve and the curvature of the implied forward rate function. Journal of Banking & Finance XXXVI, 121-135.