

## Búsqueda exhaustiva por entornos aplicada al diseño económico de bóvedas de hormigón armado

A. Carbonell, V. Yepes\* y F. González-Vidosa

Instituto de Ciencia y Tecnología del Hormigón (ICITECH), Dpto. Ingeniería de la Construcción, Universitat Politècnica de València, Campus de Vera, Valencia, España

### INFORMACIÓN DEL ARTÍCULO

#### Historia del artículo:

Recibido el 20 de mayo de 2010

Aceptado el 16 de diciembre de 2010

On-line el 9 de agosto de 2011

#### Palabras clave:

Bóvedas

Diseño estructural

Optimización heurística

Código Gray

Hormigón estructural

#### Keywords:

Road vaults

Structural design

Heuristic optimization

Gray coding

Concrete structures

### R E S U M E N

El artículo presenta dos algoritmos multiarranque de búsqueda exhaustiva por entornos de máximo gradiente aplicados a la optimización económica de una bóveda de hormigón armado empleada en la construcción de pasos inferiores. La bóveda se define mediante 45 variables discretas, siendo la función objetivo el coste. Los métodos se han aplicado a una bóveda de 12,40 m de diámetro interior y 3,00 m de altura de hastiales, con un relleno de tierras de 1,00 m sobre clave. Las variables se han codificado en base 2 para el algoritmo GB1 y en codificación Gray para el algoritmo GB2. El entorno queda definido por el conjunto de soluciones que difieren de la solución actual en un solo dígito. La codificación Gray soluciona la falta de adyacencia entre soluciones próximas que conlleva la codificación binaria ordinaria. Su efecto positivo se comprueba en el artículo, donde el coste medio de 3.000 ejecuciones de GB2 es un 3,81% menor a 3.000 ejecuciones de GB1; además, ha permitido alcanzar la solución de coste mínimo. El artículo plantea un criterio de parada de un algoritmo multiarranque basado en la estabilidad de los estadísticos de la muestra de óptimos locales obtenidos hasta el momento. El algoritmo presentado es sencillo y generalizable a cualquier estructura. La estructura de coste mínimo presenta una esbeltez importante en la bóveda, con una relación canto/luz inferior a 1/40. Se han encontrado ahorros cercanos al 6% respecto a una bóveda real diseñada siguiendo los procedimientos habituales de cálculo de una oficina de proyectos experimentada.

© 2010 CIMNE (UPC). Publicado por Elsevier España, S.L. Todos los derechos reservados.

### Global best local search applied to the economic design of reinforced concrete vaults

#### A B S T R A C T

This paper presents two gradient algorithms applied to the economic optimization of reinforced concrete vaults, typically used in the construction of underpasses. The algorithms are gradient multi start neighbourhood exhaustive search procedures. The vault is defined by 45 design variables and the objective function is an economic one. Both methods have been applied to a vault of 12.40 m of diameter and 3.00 m of lateral walls. Design variables have been coded in base 2 for algorithms GB1 and in Gray coding for GB2. The neighbourhood is defined by the set of solutions that differ in one bit. The Gray coding solves the lack of proximity between two solutions typical of the ordinary binary coding. The positive effect of the Gray coding is proven in the present paper, where the average cost of 3,000 runs of GB2 improves by 3.81% a similar run by algorithm GB1. In addition, GB2 attains the best cost solution. The paper includes a stop criterion for the algorithm based on the stability of the statistics of the multi start results. The algorithms are simple and can be applied to other structural problems. The structure of best cost has a high slenderness and a span to depth ratio of 40. The study reports savings of 6% when compared to a design by an experienced practitioner office.

© 2010 CIMNE (UPC). Published by Elsevier España, S.L. All rights reserved.

### 1. Introducción

En la construcción de pasos inferiores para carreteras, ferrocarriles u obras hidráulicas, una tipología estructural muy empleada son las bóvedas de hormigón armado. Su uso resulta especialmente

\* Autor para correspondencia.

Correo electrónico: [vyepesp@upv.es](mailto:vyepesp@upv.es) (V. Yepes).

apropiado cuando la longitud de la estructura supera los 300 m, pues el número de puestas del encofrado puede hacerlo rentable frente a otras estructuras como los marcos; o bien cuando la sobrecarga de tierras es elevada, normalmente por encima de los 5 m. La aplicación de cualquier metodología de diseño que sea capaz de reducir los costes de ejecución de este tipo de estructuras puede suponer ahorros económicos significativos, debido a los elevados volúmenes de obra requeridos.

El diseño actual de estas estructuras depende fundamentalmente de la experiencia de los proyectistas. Los procedimientos habituales utilizados en el proyecto parten de un predimensionamiento geométrico y del empleo de unos materiales cuyas características se encuentran sancionadas por la práctica. Una vez se ha definido la estructura, se realiza un análisis de esfuerzos y el cálculo de la armadura activa y pasiva capaz de satisfacer los estados límite prescritos por la norma de hormigón. Si este diseño previo resulta excesivo o insuficiente, la estructura vuelve a definirse, dentro de un proceso de prueba y error, que finaliza con una solución que garantice la seguridad estructural. Sin embargo, la objetividad del diseño y su economía dependen fuertemente de la pericia del calculista. Los métodos de optimización ofrecen una alternativa objetiva al diseño tradicional, pues éstos permiten calcular y comprobar una estructura en un proceso iterativo que busca la mejor opción dentro del espacio de soluciones. De esta forma, el diseño queda explicitado a través de las variables que definen la mejor alternativa encontrada. Con todo, la experiencia del proyectista resulta imprescindible en el desarrollo de los programas y en la interpretación de los resultados obtenidos por el ordenador.

Las técnicas exactas de optimización condicionada, basadas en la programación matemática, permiten alcanzar el óptimo global de un problema [1,2]. Sin embargo, estos métodos presentan una gran limitación práctica, puesto que el tiempo de cálculo crece exponencialmente con el número de variables, hecho que impide afrontar la optimización de la mayoría de las estructuras reales. Sarma y Adeli [3] aportan una amplia revisión de artículos sobre optimización de estructuras de hormigón. Con todo, es posible utilizar técnicas de optimización heurística, que son métodos aproximados que proporcionan buenas soluciones en tiempos de cálculo razonables. Este grupo incluye una amplia variedad de procedimientos que se han desarrollado inspirándose en procesos físicos o biológicos, tales como los algoritmos genéticos [4], el recocido simulado [5], la optimización basada en colonias de hormigas [6] o en nubes de partículas [7], entre otros. La optimización heurística se ha manejado con éxito en áreas diferentes de la ingeniería estructural [8]. Cohn y Dinovitzer [9] tras realizar una revisión de los métodos empleados en la optimización de estructuras advierten del vacío existente entre los estudios teóricos y las aplicaciones reales, indicando además que muchos estudios se han centrado en estructuras de acero mientras que una fracción muy pequeña se ha ocupado del hormigón estructural.

Las primeras publicaciones sobre optimización del hormigón estructural se remontan a 1997, con los trabajos de Balling y Yao [10] sobre pórticos tridimensionales y los de Coello et al. [11] sobre vigas simplemente apoyadas. Un año después de Leite y Topping [12] optimizaron vigas de hormigón pretensado. Gran parte de estos trabajos y otros posteriores han utilizado profusamente la programación evolutiva, y en especial los algoritmos genéticos. Kicinger et al. [13] aportan una revisión de la programación evolutiva y el diseño estructural. Recientemente, nuestro grupo de investigación ha presentado trabajos con técnicas no evolutivas relacionadas con la optimización de muros [14], marcos de carreteras [15], pórticos de edificación [16–18] o pilas de puentes [19].

Las bóvedas de hormigón armado que se presentan en este trabajo se utilizan normalmente en la construcción de falsos túneles empleados en carreteras, ferrocarriles u obras hidráulicas. Sus elementos característicos son la losa de cimentación, los hastiales

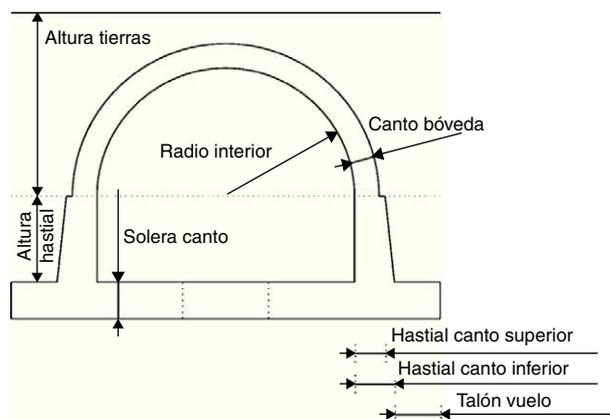


Figura 1. Definición geométrica de la bóveda.

laterales –de espesor variable– y la bóveda semicircular situada en la parte superior (fig. 1). Las dimensiones principales de la bóveda son la luz libre horizontal –que es igual al diámetro de la bóveda– y la altura de los hastiales. Las luces habituales varían entre un mínimo de 4,00 m, en el caso de pequeñas obras hidráulicas, hasta los 13,00 m en pasos inferiores de carreteras y ferrocarriles. El espesor de la bóveda suele oscilar entre los 0,20 m en las obras pequeñas, hasta los 0,70 m en el caso de grandes sobrecargas de tierra y elevadas luces libres. Los cantos habituales de la losa de cimentación fluctúan entre 1/8 y 1/12 de la luz libre. La construcción se realiza habitualmente por tramos de unos 12,00 m de longitud –por ejemplo una estructura de 300 m se realizaría en 25 tramos–. Los parámetros principales necesarios para el diseño son la luz libre de la bóveda, la altura de los hastiales, la cobertura de tierras y la rigidez del terreno sobre el que apoya la estructura. Los cálculos se realizan para soportar las acciones prescritas por la instrucción de cargas considerada en el análisis [20] y debe cumplir los estados límite prescritos por la instrucción de hormigón de aplicación [21].

Este trabajo se centra en el cálculo estructural y en la optimización económica de bóvedas empleadas como paso inferior en carreteras. El método seguido consiste en el desarrollo de un programa que comprueba las secciones de la estructura, donde las dimensiones, los materiales y las armaduras de refuerzo son variables discretas. Este módulo evalúa el coste de la solución y comprueba que se cumplen las restricciones impuestas por todos los estados límite relevantes. Se han empleado dos algoritmos multiarance de búsqueda exhaustiva por entornos, uno basado en la codificación binaria ordinaria de las variables discretas y el otro basado en una codificación Gray, que se han denominado GB1 y GB2, respectivamente. El artículo, tras realizar el planteamiento del problema de optimización, define los algoritmos de búsqueda de arranque múltiple y presenta los resultados obtenidos por ambos métodos, recogiendo las principales conclusiones.

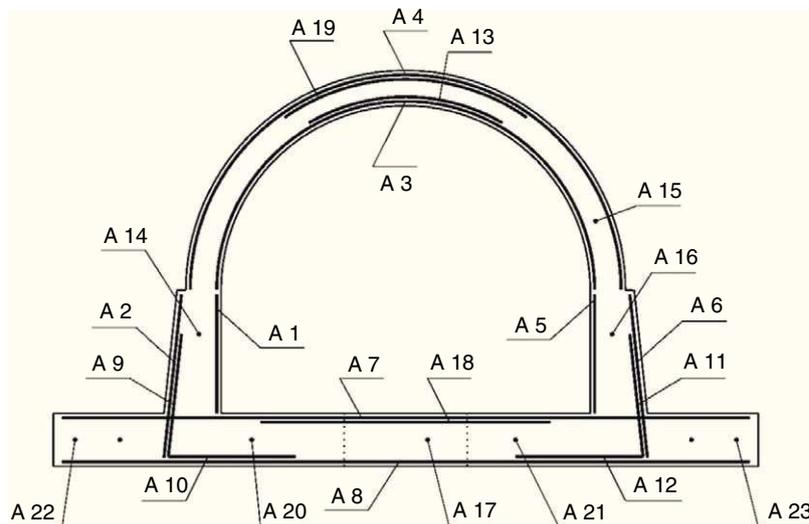
## 2. Planteamiento del problema de optimización

El problema consiste en la optimización económica de una bóveda de hormigón armado. Se trata de minimizar la función objetivo  $F$  de la expresión (1), de modo que satisfaga las restricciones expresadas en la expresión (2).

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1, r} p_i * m_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1)$$

$$g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0 \quad (2)$$

Obsérvese que  $x_1, x_2, \dots, x_n$  son las variables de diseño cuya combinación es objeto de la optimización. Los datos necesarios para calcular la bóveda son los parámetros asociados al problema. La



**Figura 2.** Armaduras consideradas en la optimización de la bóveda. Para mayor claridad no se ha esquematizado el anclaje de las armaduras –solo sus longitudes de cálculo–, ni las armaduras de cortante.

función objetivo (1) expresa el coste de ejecución de la estructura como sumatorio de los costes unitarios de las respectivas unidades de obra por sus mediciones. La expresión (2) representa todas las condiciones, tanto de estados límite como geométricas o de constructibilidad, que debe verificar la estructura. La definición de problema se basa en la tesis doctoral de Carbonell [22].

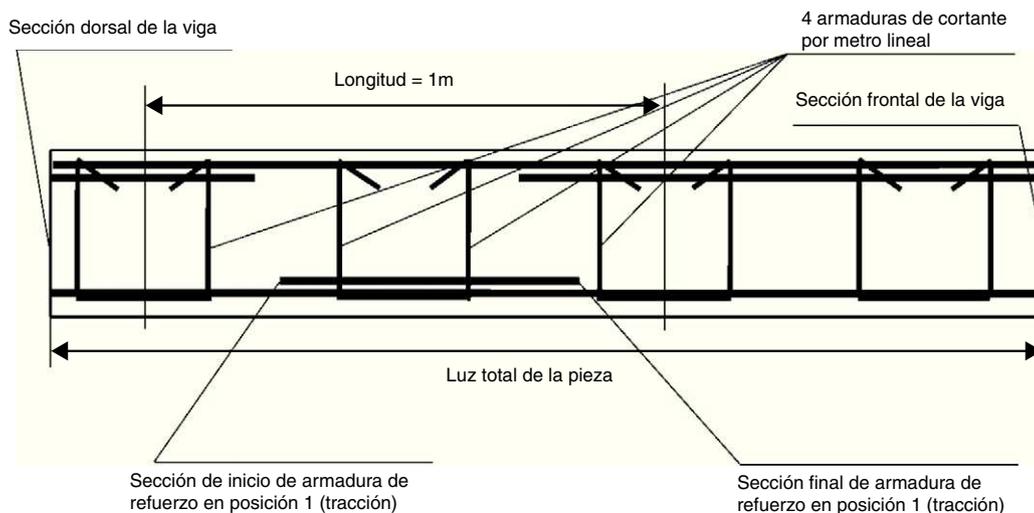
### 2.1. Variables de diseño

Se han considerado 45 variables de diseño que definen la geometría, el tipo de hormigón y el esquema de armado adoptado. Se incluyen 5 variables geométricas (fig. 1) que determinan el canto de la bóveda, el espesor superior e inferior de los hastiales, el canto de la solera y la longitud los talones; diferentes tipos de hormigón para cada uno de los 3 elementos (bóveda, solera y hastiales), 1 modulación de armado correspondiente a la distancia entre dos planos de armado consecutivos paralelos a la sección transversal de la estructura, 4 modulaciones correspondientes a la separación entre dos planos de armadura de cortante para cada elemento (bóveda, hastial, solera y talón) y 32 variables de decisión asociadas a la longitud y disposición de las armaduras, siguiendo un esquema de armado normalizado. La figura 2 muestra las variables de armado

transversal y de cortante adoptadas. Además, se han utilizado 26 apuntadores, que representan a valores adoptados por referencia a otras variables de diseño y que permiten, por ejemplo, aprovechar la simetría del problema.

Todas las variables son discretas, lo cual facilita la constructibilidad de la estructura. Así, por ejemplo, los espesores de los elementos varían en escalones de 5 cm; la resistencia a compresión simple de los hormigones a 28 días varían de 25 MPa a 35 MPa, en escalones de 5 MPa, los diámetros de las armaduras siguen la serie de la EHE que discurre desde los 6 mm hasta los 40 mm, añadiendo un grupo compuesto por dos barras de 32 mm. La disposición de las armaduras se ha realizado en base a módulos que permiten que la ferralla sea montable. Esta modulación define, mediante un número natural, el número de grupos de barras iguales por metro lineal que compone una armadura determinada (pueden ser 3, 4 o 5). Además, la aplicación ha considerado la posibilidad de continuidad de barras de un módulo a otro adyacente. En la figura 3 se ha representado un ejemplo de distribución de armaduras, mostrando un tramo de un metro de longitud.

El conjunto de las 45 variables de diseño determina el espacio de soluciones. En este trabajo, las variables se han representado en código binario, correspondiéndoles 175 bits de contenido



**Figura 3.** Ejemplo de distribución de armaduras, incluyendo refuerzos de tracción y compresión.

**Tabla 1**  
Parámetros geométricos y de acciones básicas de la bóveda

Parámetro	Valor
Luz libre horizontal	12,40 m
Altura vertical de los hastiales	3,00 m
Cobertura de tierras	1,00 m
Peso específico aparente del relleno	20 kN/m <sup>3</sup>
Ángulo de rozamiento interno del relleno	30°
Coefficiente de balasto del suelo	10 MN/m <sup>3</sup>
Sobrecarga uniformemente distribuida	4 kN/m <sup>2</sup>
Vehículo pesado	600 kN
Flecha límite del vano	1/250
Coefficiente parcial de seguridad para las cargas permanentes	1,60
Coefficiente parcial de seguridad para las cargas variables	1,60
Coefficiente de seguridad para el hormigón	1,50
Coefficiente de seguridad para el acero	1,15
Clase específica de exposición ambiental EHE	Ila

informático. Este espacio presenta un número desorbitado de posibles soluciones, debido a la explosión combinatoria generada por las variables, que es del orden de  $1,34 \cdot 10^{44}$ . Cada combinación de los valores permitidos para cada variable define un vector al que se le puede asignar un coste, según la expresión (1). Las soluciones que satisfacen las restricciones señaladas en la expresión (2) se denominan factibles, y las que no, soluciones no factibles.

## 2.2. Parámetros

Los parámetros del análisis son todas las magnitudes tomadas como datos fijos y que, por tanto, no son objeto de optimización. Son los valores geométricos, las propiedades del terreno de cimiento y del relleno de tierras, los coeficientes parciales de seguridad y los datos referidos a la durabilidad. Los principales parámetros geométricos son la luz libre horizontal, que coincide con el diámetro interior de la bóveda, la altura de los hastiales y la cobertura de tierras. El parámetro más importante del terreno lo constituye su módulo de deformación. Los datos del relleno son su peso específico aparente y su ángulo de rozamiento interno. Las condiciones de exposición, para cumplir las condiciones de durabilidad, son las relativas a la instrucción EHE [21]. La tabla 1 resume los parámetros empleados.

## 2.3. Función de coste

La función objetivo que se ha considerado es el coste definido en la expresión (1), donde  $p_i$  son los precios unitarios mientras que  $m_i$  son las mediciones de las unidades de obra necesarias para construir la bóveda. La función de coste incluye el precio de los materiales (hormigón y acero) y todos los datos necesarios para calcular el coste por metro lineal (euros/m). Se excluye la valoración del movimiento de tierras, de reducida trascendencia, ya que la misma depende de la sección transversal que adopte el terreno en cada caso. Los precios unitarios se recogen en la tabla 2.

Con las 45 variables que definen el problema, las mediciones y el cálculo del coste es inmediato. El esfuerzo principal en computación se requiere para evaluar las restricciones impuestas por los estados límites. Es importante resaltar que en este trabajo se aceptan soluciones no factibles, es decir, que incumplen las condiciones impuestas por los estados límite, pero penalizándolas en su coste. La penalización que se ha utilizado es la siguiente:

$$F^+ = F + \sum \Phi_j P_j \quad (3)$$

donde  $F^+$  representa la función penalizada,  $F$  es el coste,  $\Phi_j$  es el porcentaje de incumplimiento para un estado límite y  $P_j$  es la penalización empleada.

**Tabla 2**  
Precios unitarios de la función de coste

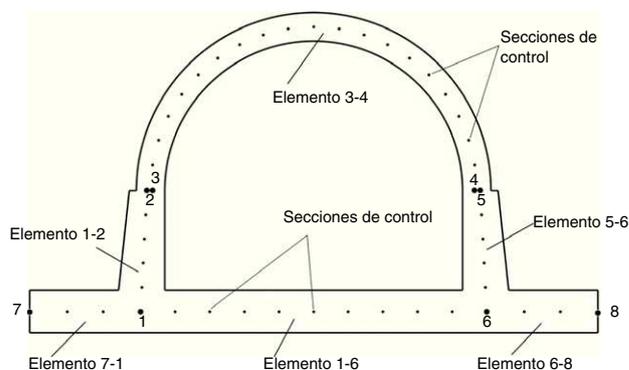
Unidad de obra	Coste (€)
kg Acero B 500 S	1,000
m <sup>2</sup> Encofrado cimientos	9,015
m <sup>2</sup> Encofrado muros	12,621
m <sup>2</sup> Encofrado dintel	21,035
m <sup>3</sup> Cimbra	10,818
m <sup>3</sup> Colocación hormigón zapatas	3,606
m <sup>3</sup> Colocación hormigón hastiales	5,409
m <sup>3</sup> Colocación hormigón losa	4,508
m <sup>3</sup> Bomba para colocación hormigón	4,808
m <sup>3</sup> Hormigón HA-25	43,724
m <sup>3</sup> Hormigón HA-30	46,579
m <sup>3</sup> Hormigón HA-35	49,434
m <sup>3</sup> Hormigón HA-40	52,289
m <sup>3</sup> Hormigón HA-45	55,144
m <sup>3</sup> Hormigón HA-50	57,999

## 2.4. Restricciones estructurales

La expresión (2) representa todos los estados límite que la estructura y el cimiento deben cumplir. Estas restricciones son las requeridas por las normas españolas para el proyecto de este tipo de estructuras [21] e incluyen la comprobación de los estados límites últimos de flexión y cortante para la envolvente de esfuerzos originados por las cargas de tráfico y la sobrecarga de tierras. De este modo, se han seguido los preceptos de la instrucción EHE [21]. Un paso previo a la verificación de los estados límite consiste en el cálculo de la envolvente de esfuerzos debido a las acciones. Las acciones permanentes son las del peso propio, la sobrecarga de tierras y el empuje activo de los rellenos. Se han comprobado las hipótesis de carga del relleno de tierras con fracciones de  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{3}{4}$  de la altura total, con empujes horizontales de 0,20, 0,33 y 0,50 respecto al vertical. Asimismo, se consideran las sobrecargas de uso descritas en la instrucción IAP [20], en particular, una carga repartida de 4,0 kN/m<sup>2</sup> y un vehículo pesado de 600 kN.

Las tensiones resultantes y las reacciones se han calculado mediante un programa propio de elementos finitos bidimensional, con 6 elementos barra, 8 nodos y 50 secciones de control (fig. 4), siendo el análisis elástico y lineal, con tensiones planas. Se hace notar que las barras modelan la losa de cimentación, los muros laterales y el arco superior. Para ello se ha calculado la matriz del modelo teórico de la viga flotante que actúa como cimentación y del elemento arco. En éste último caso la teoría resulta admisible puesto que el radio de curvatura de la bóveda es, a todo caso, bastante superior al doble del canto de la pieza. Las expresiones para los términos de las matrices de rigidez se pueden encontrar en el Apéndice B de la tesis doctoral de Carbonell [22].

La modelización adoptada para cada barra está basada en el concepto clásico de viga de Euler-Bernoulli. La construcción de la



**Figura 4.** Modelo estructural empleado para el análisis de la bóveda.

bóveda se realiza mediante secciones de 12 m de longitud, por lo que se ha supuesto para el cálculo una rebanada de espesor unitario, con tensiones normales nulas en sus caras extremas. Las tensiones normales en la dirección de la directriz longitudinal se absorben mediante la armadura longitudinal necesaria para los momentos fuera del plano, asumiendo que son la quinta parte de los momentos en el plano. Una vez determinadas las cargas sobre los nodos, se procede al cálculo de los esfuerzos en las secciones de hormigón de la estructura resolviendo un sistema de ecuaciones lineales planteado sobre los desplazamientos en los nodos y cuyo vector de términos independientes se forma a partir de las cargas de los nodos. La resolución del sistema se acomete mediante la factorización de la matriz de rigidez de la estructura con el algoritmo de Cholesky. Sin perder generalidad en la metodología empleada, en este trabajo no se han considerado otro tipo de solicitaciones como acciones sísmicas o empujes hidrostáticos.

Para la verificar el estado límite de servicio a flexión se comprueba si las resultantes Nd-Md se encuentran dentro del diagrama de interacción Nu-Mu, adoptándose el diagrama parábola-rectángulo para el hormigón. Con respecto al cortante, las acciones se comparan con los valores últimos. Se comprueba también que se cumplen con las cuantías mecánicas y geométricas mínimas. El estado límite de servicio de fisuración comprueba el cumplimiento del límite de anchura de fisura máximo para las condiciones de durabilidad exigidas. No se ha contemplado el estado límite de fatiga del hormigón ni del acero debido a que no es habitual llegar a ella con este tipo de estructuras. Se ha supuesto un nivel de control de ejecución normal.

Téngase en cuenta que conocidos los valores de las variables que definen la bóveda, se realiza una comprobación de la estructura, que no un dimensionamiento del armado en el sentido habitual. Así, cabe señalar que un procedimiento de cálculo habitual dimensiona, en primer lugar, las armaduras en estado límite último de flexión para seguidamente comprobar y redimensionar en estado límite último de fisuración y flechas, y finalmente se dimensiona a cortante sin alterar la armadura longitudinal. Este orden convencional es efectivo, pero obvia otras posibilidades que la optimización heurística no descarta. Así, por ejemplo, se pueden eliminar armaduras de cortante con aumentos localizados de armadura longitudinal, lo que puede resultar más económico.

### 3. Algoritmo multiarranque de búsqueda exhaustiva de máximo gradiente

El algoritmo empleado en este estudio es un método multiarranque de búsqueda exhaustiva de máximo gradiente (*Global Best*: GB). Los métodos multiarranque [23,24], también llamados de trayectorias múltiples, combinan dos fases diferenciadas. En la primera de ellas se genera una solución de partida y en la segunda se aplica un método de búsqueda en el espacio de las soluciones que mejora la misma hasta alcanzar un óptimo local. Cada iteración de este proceso de generación y mejora permite definir un conjunto de óptimos relativos, del cual se puede extraer la solución de menor coste del problema. Así, el proceso se repite reiteradamente hasta cumplir con un criterio de parada preestablecido, eligiéndose el óptimo local alcanzado que presente una mejor valoración de su función objetivo.

En el caso que se presenta, la solución inicial se genera dando valores aleatorios a las variables del problema. La fase de mejora empleada en este trabajo se basa en una búsqueda local por entornos. Para ello es necesario definir un mecanismo, que llamaremos *movimiento*, que permita modificar una solución en otra similar a ella. Se denomina *entorno* al conjunto de soluciones a las que se puede llegar aplicando un movimiento desde una solución dada. GB explora exhaustivamente todo el entorno y reemplaza la solución

actual por la de menor coste del vecindario. El proceso de búsqueda se detiene cuando las soluciones del entorno no pueden mejorar la solución actual. Este procedimiento es determinístico, pues partiendo desde una solución inicial dada, se llega siempre al mismo óptimo local. Además, el algoritmo empleado para este trabajo no descarta ninguna solución, puesto que si ésta incumpliera las restricciones impuestas, se procedería a penalizar su coste, según la expresión (3).

La codificación binaria ha sido muy usada en los algoritmos genéticos porque resulta muy fácil de implementar [4], sin embargo, queda por comprobar su aplicabilidad y eficiencia en procedimientos de búsqueda exhaustiva. En este trabajo, cada solución se representa en función del valor que toma cada variable, que se transforma en un número entero dividiéndolo por un múltiplo, que luego se traduce a alfabeto binario. Los códigos binarios de todas las variables se concatenan para obtener la cadena que forma la representación de una solución. Así, se define una cadena de 175 bits, que representa todos los valores posibles de las 45 variables de la bóveda, reconociendo el algoritmo los valores máximos y mínimos para cada una de ellas. De esta forma, todas las soluciones que difieran en un solo bit respecto a la solución actual conformarán su entorno, lo cual permite explorar de forma exhaustiva todas las posibilidades. La solución actual se podrá sustituir por otra solución candidata que será la mejor del entorno, siempre que la candidata presente una mejor valoración de la función objetivo que la solución actual, pues en caso contrario, el algoritmo se detendría en un óptimo local. Es un movimiento genérico, sencillo, rápido y que, además, no precisa calibración.

Sin embargo, la codificación binaria no es homogénea respecto a su equivalente en base decimal. Por ejemplo, al número 7 le sigue el 8 con un solo cambio de dígito, pero sus correspondientes en código binario, 0111 y 1000, necesitan cuatro cambios de dígito para pasar de uno al otro. Este es un problema conocido de la codificación binaria que se conoce como *Hamming Cliff*. Para evitarlo, se ha utilizado la codificación Gray estándar [25], que permite el paso de un número al siguiente mediante un solo cambio de dígito. Esto permite una representación alternativa en la que la adyacencia existente en el espacio de búsqueda se pueda mantener en el espacio que lo representa. Hollstein [26] fue el primero en aplicar la codificación Gray a los algoritmos genéticos y fueron Caruana y Schaffer [27] los que comprobaron que esta representación es más efectiva en dichos algoritmos que la codificación binaria. Para comprobar la validez del código Gray en procedimientos de búsqueda exhaustiva de máximo gradiente, se plantean dos algoritmos que se diferencien en dicha codificación. El algoritmo GB1 empleará una codificación binaria directa, donde el número entero que representa el valor de cada variable se utiliza en base 2. Por otra parte, el algoritmo GB2 utilizará la codificación Gray estándar, de modo que se evite el problema de falta de adyacencia en el espacio de búsqueda comentado.

Por tanto, la búsqueda local queda definida de este modo: (a) una cadena aleatoria de 175 bits de «ceros y unos» genera una bóveda inicial; (b) se comprueba para esta bóveda el cumplimiento de todos los estados límite representados por la expresión (2); (d) se valora su coste aplicando las posibles penalizaciones por incumplimientos en las restricciones, según la expresión (3); (e) a continuación se generan las 175 bóvedas que difieren en un solo dígito binario respecto a la inicial –búsqueda exhaustiva– y se valoran sus incumplimientos y coste; (f) se elige la mejor bóveda generada de esta forma; (g) si su coste es menor al de la bóveda inicial, entonces la sustituye, y se vuelve al paso (e), en caso contrario el proceso se detiene y devuelve la bóveda actual como óptimo local. Bastará ahora repetir el proceso de búsqueda local –vuelta a empezar desde el paso (a)– un número de veces determinado para elegir la mejor bóveda como aquella de entre el conjunto formado por los óptimos locales que presenta un menor coste. El criterio de parada, como

**Tabla 3**  
Descripción estadística básica de las muestras

	GB1		GB2 Gray	
	Coste (€/m)	Iteraciones	Coste (€/m)	Iteraciones
Media	6.098,76	8.420,09	5.866,59	10.492,37
Error típico	7,32	20,14	7,48	26,55
Nivel de confianza para la media al 95%	14,35	39,49	14,66	52,05
Coefficiente de variación %	6,57	13,10	6,98	13,86
Curtosis	22,99	0,08	28,06	0,14
Coefficiente de asimetría	3,03	0,21	3,64	0,23
Percentil del 5%	5.614,82	6.612	5.398,64	8.178
Mínimo	5.185,43	6.612	5.182,13	9.570

se discute en el apartado siguiente, se basará en la estabilidad de los estadísticos que describen la muestra de óptimos locales generados. La aplicación de los algoritmos citados permite la obtención completa de la estructura cuando termina el proceso de búsqueda, con la obtención de la mejor solución hallada que, en general, no será la que represente al óptimo global, aunque sí será una buena aproximación a dicho óptimo.

#### 4. Análisis y discusión de resultados

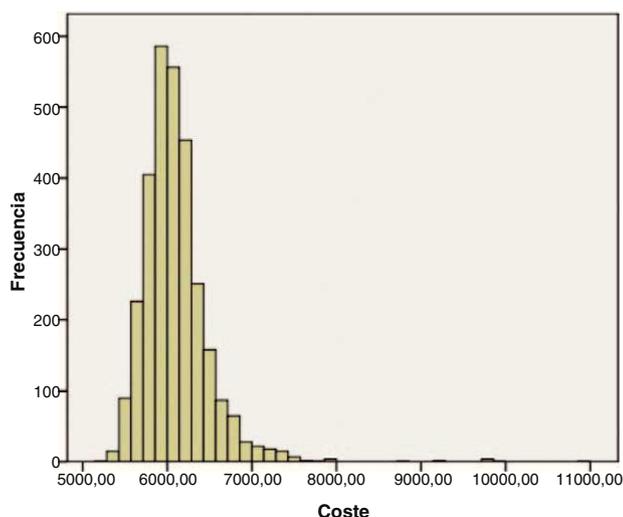
Los algoritmos se han codificado en Fortran 90, en un ordenador personal con procesador Intel I7 de 2,94 GHz y 3 Gbyte de RAM. Con este equipo, 10.000 iteraciones tardan 11 segundos en ejecutarse. El algoritmo GB1 ha necesitado una media de 8.420,09 iteraciones, mientras que el GB2 ha requerido 10.492,37. Por tanto, las 3.000 ejecuciones de GB1 han supuesto 25,26 millones de iteraciones, con un total de 7,7 horas de cálculo; mientras que para GB2 se han requerido 31,48 millones de iteraciones y 9,6 horas. Sin embargo, como se verá en este epígrafe, el número de ejecuciones necesarias para obtener un óptimo de calidad suficiente es inferior al planteado, llegándose con tiempos de cálculo menores.

Las figuras 5 y 6 muestran los histogramas de los óptimos locales encontrados para la bóveda de 12,40 m con los algoritmos GB1 y GB2, respectivamente. En la tabla 3 se ha recogido la descripción estadística de los resultados obtenidos. Puede apreciarse que ambas distribuciones son asimétricas positivas (coeficientes de asimetría mayores que cero) y leptocúrticas –gran concentración de datos alrededor de los valores centrales de las variables (coeficiente de curtosis positivos). En relación con los resultados medios, el algoritmo GB2 proporciona costes un 3,81% menores a los alcanzados

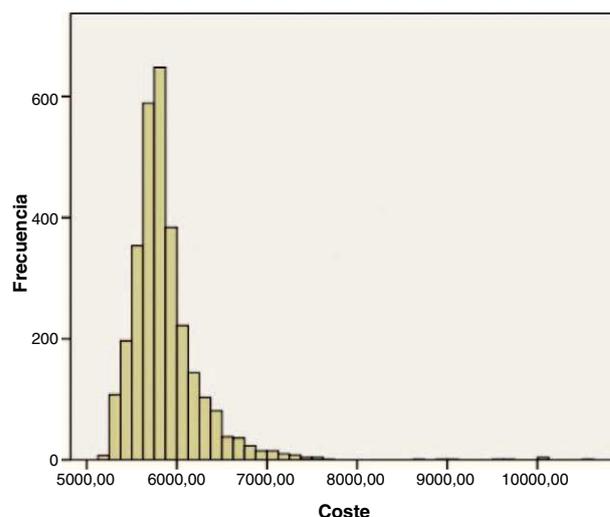
con el GB1, si bien con un 24,61% más de iteraciones. Estos estadísticos son robustos para el tamaño de muestra empleado, pues los errores típicos de las medias son solo del 0,12% para el GB1 y del 0,13% en el caso del GB2. Además, los intervalos de confianza de las medias al 95%, calculados mediante la distribución *t* de Student no se cruzan, lo cual apunta a que las poblaciones de óptimos locales obtenidos por ambos algoritmos de optimización son diferentes. La no igualdad de medias también se ha comprobado mediante la prueba no paramétrica de Kruskal-Wallis (ver, por ejemplo, Conover [28]). En cuanto a la dispersión de los datos respecto a los valores centrales, ambas distribuciones presentan un comportamiento similar. En efecto, el promedio de la diferencia entre cada valor y su media, en valor absoluto, es del 4,44% para GB1 y del 4,46% para GB2. También los coeficientes de variación –relación entre la media y la desviación típica– son similares, del 6,57% para GB1 y del 6,98% para GB2.

No solo la heurística GB2 se comporta mejor en promedio, sino también en los resultados de coste mínimo. La mejor bóveda se ha encontrado con GB2, si bien la reducción en coste ha sido solo del 0,06% respecto a la mejor solución encontrada por GB1. Ello a pesar de que la mejor solución aportada por GB1 presenta un coste especialmente bajo, pues si comparamos las segundas mejores soluciones de GB1 y GB2 (5.310,20€ y 5.187,94€, respectivamente) se observa que GB2 encuentra una segunda mejor solución que presenta un coste un 2,30% menor a la segunda mejor opción de GB1. Este hecho también se confirma cuando se comparan los percentiles del 5% (tabla 3), donde en el caso de GB2 presenta un menor coste del 3,85% en relación con el correspondiente de GB1.

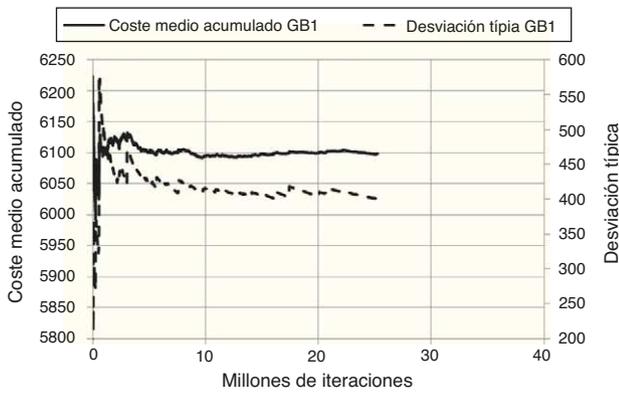
El análisis de los óptimos locales obtenidos para cada una de las heurísticas estudiadas indica claramente que la adopción de una codificación Gray es capaz de mejorar significativamente la



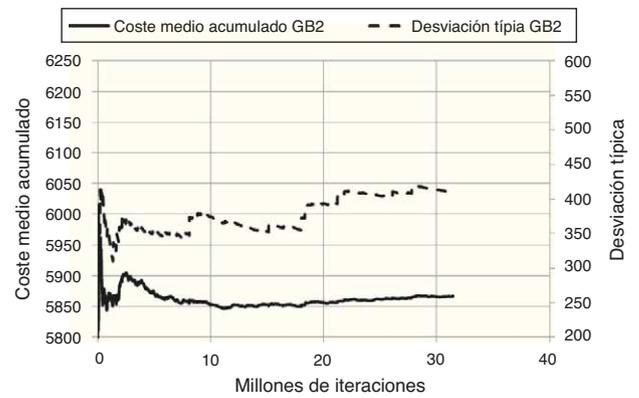
**Figura 5.** Histograma de 3.000 óptimos locales obtenidos mediante el algoritmo GB1.



**Figura 6.** Histograma de 3.000 óptimos locales obtenidos mediante el algoritmo GB2.



**Figura 7.** Evolución del coste medio acumulado y de la desviación típica de los óptimos locales de la bóveda obtenidos mediante el algoritmo GB1 con el número de iteraciones realizadas.



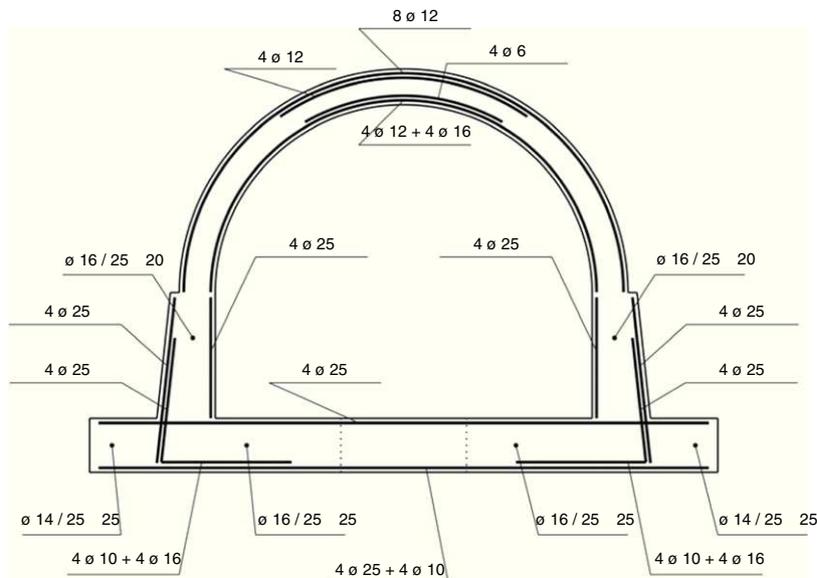
**Figura 8.** Evolución del coste medio acumulado y de la desviación típica de los óptimos locales de la bóveda obtenidos mediante el algoritmo GB2 con el número de iteraciones realizadas.

búsqueda de soluciones óptimas al problema del coste de las bóvedas. Esta codificación afecta fundamentalmente a la posición de la función de distribución de las muestras, más que a su dispersión o a su forma. Además, la codificación Gray permite al algoritmo GB2 mayores trayectorias de búsqueda, que no acaban prematuramente en un óptimo local, lo cual se deduce por que el número de iteraciones medias para GB2 es significativamente mayor que para GB1. Cabe concluir, por tanto, que la falta de adyacencia entre dos soluciones contiguas debido a una representación binaria estándar supone una barrera para la obtención de mejores soluciones óptimas.

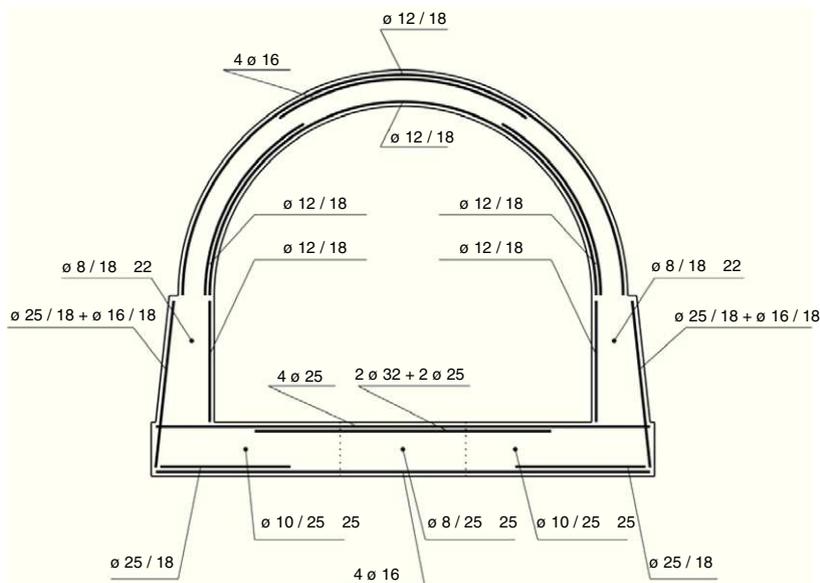
Otro aspecto que debe analizarse es el número de reinicios del algoritmo para considerar que el óptimo local de menor coste es suficientemente bueno desde el punto de vista ingenieril. Las figuras 7 y 8 muestran la evolución del valor medio acumulado y la desviación típica del coste a lo largo de las iteraciones necesarias para ejecutar los algoritmos GB1 y GB2, respectivamente, en 3.000 ocasiones. En dichas figuras se observa cómo ambos estadísticos se estabilizan conforme aumenta el número de ejecuciones realizadas. Por tanto, un criterio de parada objetivo para determinar los arranques necesarios para cada algoritmo podría establecerse mediante un indicador que midiese la estabilidad conseguida. En este trabajo se ha medido la máxima discrepancia existente entre el valor actual del promedio acumulado o de la desviación típica

respecto a las 9 ejecuciones anteriores. Suponiendo una exigencia de una discrepancia máxima del 0,1% en la media y del 5% en la desviación típica, serían necesarias 417 ejecuciones con GB1 y 784 ejecuciones con GB2. Con una exigencia mayor, del 0,05% para la media y del 1% para la desviación típica, serían necesarias 2.478 ejecuciones con GB1 y 2.666 con GB2. Tras las 3.000 ejecuciones, las máximas discrepancias existentes han sido del 0,006% para la media y del 0,033% para la desviación típica en el caso de GB1 y del 0,007% y del 0,063%, respectivamente, para GB2. Desde un punto de vista práctico, estas discrepancias suponen un coste económico real despreciable, siendo el tiempo de cálculo, para el equipo empleado, de 2,5 horas para las 784 ejecuciones de GB2.

El coste de la mejor solución ha sido encontrado por el algoritmo GB2, siendo de 5.182,13 € por metro lineal de bóveda, lo cual es un 5,7% inferior al coste de la bóveda diseñada en 2002 por el tercer autor para la autovía Valle Romano en Málaga siguiendo los procedimientos habituales de cálculo de una oficina de proyectos experimentada y aplicando los mismos precios utilizados en la tabla 2. El canto de la bóveda optimizada es de 30 cm para los 12,40 m de luz libre, lo cual supone una esbeltez bastante importante, de 1/41,33. Los cantos superior e inferior de los hastiales son de 30 cm y 55 cm, respectivamente. El canto de la solera es de 70 cm y el vuelo de los talones de 280 cm. El hormigón resultante para la bóveda y los hastiales es de 30 MPa de resistencia característica y



**Figura 9.** Armaduras correspondientes a la solución de menor coste de la bóveda de 12,40 m.



**Figura 10.** Armaduras correspondientes a la solución de la bóveda de 12,40 m construida para la autovía Valle Romano en Málaga en 2002.

el de la solera y talones de 25 MPa. La disposición de armaduras de la bóveda óptima se ha representado en la figura 9, mientras que en la figura 10 corresponde a la bóveda construida en Málaga. En la bóveda real, el canto de la bóveda es de 25 cm; los cantos superiores e inferiores de los hastiales son de 50 cm y 60 cm, respectivamente; el canto de la losa es de 100 cm; el hormigón empleado en solera fue de 25 MPa y el de hastiales y bóveda, de 30 MPa. Se observa que los talones de la solución optimizada permiten reducir el volumen de hormigón en la solera y la disposición de armaduras. Por otra parte, el canto de la bóveda crece en la solución óptima, aunque se eliminan parte de los refuerzos necesarios en la estructura de referencia.

Por último, indicar que GB2 constituye un algoritmo de búsqueda local exhaustiva fácil de programar y de aplicación general a cualquier problema de diseño y optimización de estructuras. Es un algoritmo rápido en el caso de la optimización de las bóvedas, pues, de media, tarda solo 11,54 segundos en alcanzar un óptimo local. Ello sugiere la posibilidad de aplicar metaheurísticas basadas en GB2, tales como la búsqueda tabú, la búsqueda local iterada o la búsqueda por umbrales, que permitan conseguir óptimos locales de mayor calidad.

## 5. Conclusiones

Un algoritmo de búsqueda exhaustiva de máximo gradiente basado en una codificación Gray es capaz de optimizar el coste de bóvedas de hormigón. La codificación Gray es más eficiente que una codificación binaria de las variables, pues proporciona un coste medio un 3,81% menor, si bien con un 24,61% más de iteraciones; además, ha permitido alcanzar la solución de coste mínimo. Ello indica que la falta de adyacencia entre dos soluciones contiguas debido a una representación binaria estándar supone una barrera para la obtención de mejores soluciones óptimas. Además, un algoritmo multiarranque que parta de soluciones iniciales aleatorias permite diversificar la búsqueda, siendo necesario un criterio de parada objetivo. En el artículo se sugiere como criterio de parada la estabilidad de los estadísticos de la muestra. En el caso particular planteado, el criterio de estabilidad establecido ha sido que la máxima diferencia entre la media actual y la de cualquiera de las 9 ejecuciones anteriores sea menor al 0,1%, y que dicha diferencia sea inferior al 5% en el caso de la desviación típica. Con ello serían necesarios 784 arranques del algoritmo GB2. Por último, el coste

mínimo dado por GB2 ha sido de un 5,7% inferior al coste de una bóveda real diseñada siguiendo los procedimientos habituales de cálculo de una oficina de proyectos experimentada.

## Agradecimientos

Los autores agradecen el aporte financiero realizado para este trabajo por la *Universitat Politècnica de València* (Proyecto de Investigación PAID-06-09) y por la *Generalitat Valenciana* (Proyecto de Investigación GV/2010/086).

## Referencias

- [1] R. Fletcher, *Practical Methods of Optimization*, Wiley, Chichester, 2001.
- [2] S. Hernández, A. Fontan, *Practical Applications of Design Optimization*, WIT, Southampton, 2002.
- [3] K.C. Sarma, H. Adeli, Cost optimization of concrete structures, *ASCE Journal of Structural Engineering* 124 (1998) 570–578.
- [4] J.H. Holland, *Adaptation in natural and artificial systems*, University of Michigan Press, Ann Arbor, 1975.
- [5] S. Kirkpatrick, C.D. Gelatt, M.P. Vecchi, Optimization by simulated annealing, *Science* 220 (1983) 671–680.
- [6] M. Dorigo, V. Maniezzo, A. Coloni, The ant system: optimization by a colony of cooperating agents, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part B* 26 (1996) 29–41.
- [7] J. Kennedy, R. Eberhart, Particle swarm optimization, *Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks IV* (1995) 1942–1948.
- [8] V. Yepes, J.R. Medina, Economic heuristic optimization for the heterogeneous fleet VRPHESTW, *ASCE Journal of Transportation Engineering* 132 (2006) 303–311.
- [9] M.Z. Cohn, A.S. Dinovitzer, Application of structural optimization, *ASCE Journal of Structural Engineering* 120 (1994) 617–649.
- [10] R.J. Balling, X. Yao, Optimization of reinforced concrete frames, *ASCE Journal of Structural Engineering* 123 (1997) 193–202.
- [11] C.A. Coello, A.D. Christiansen, F. Santos, A simple genetic algorithm for the design of reinforced concrete beams, *Engineering with Computers* 13 (1997) 185–196.
- [12] J.P.B. Leite, B.H.V. Topping, Improved genetic operators for structural optimization, *Advances in Engineering Software* 29 (7–9) (1998) 529–562.
- [13] R. Kicinger, T. Arciszewski, K. De Jong, Evolutionary computation and structural design: A survey of the state-of-the-art, *Computers & Structures* 83 (23–24) (2005) 1943–1978.
- [14] V. Yepes, J. Alcalá, C. Perea, F. Gonzalez-Vidosa, A Parametric Study of Optimum Earth Retaining Walls by Simulated Annealing, *Engineering Structures* 30 (2008) 821–830.
- [15] C. Perea, J. Alcalá, V. Yepes, F. Gonzalez-Vidosa, A. Hospitaler, Design of reinforced concrete bridge frames by heuristic optimization, *Advances in Engineering Software* 39 (2008) 676–688.
- [16] I. Paya, V. Yepes, J.J. Clemente, F. Gonzalez, Optimización heurística de pórticos de edificación de hormigón armado, *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería* 22 (2006) 241–259.

- [17] I. Paya, V. Yepes, F. Gonzalez-Vidosa, A. Hospitaler, Multiobjective Optimization of Reinforced Concrete Building Frames by Simulated Annealing, *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering* 23 (2008) 596–610.
- [18] I. Paya-Zaforteza, V. Yepes, A. Hospitaler, F. Gonzalez-Vidosa, CO<sub>2</sub>-Efficient Design of Reinforced Concrete Building Frames, *Engineering Structures* 31 (2009) 1501–1508.
- [19] F.J. Martinez, F. Gonzalez-Vidosa, A. Hospitaler, V. Yepes, Heuristic Optimization of RC Bridge Piers with Rectangular Hollow Sections, *Computers & Structures* 88 (5–6) (2010) 375–386.
- [20] Ministerio de Fomento, Instrucción sobre las acciones a considerar en el proyecto de puentes de carreteras IAP-98, Madrid, 1998.
- [21] Ministerio de Fomento, Instrucción de Hormigón Estructural EHE, Madrid, 2008.
- [22] A. Carbonell, Optimización heurística de bóvedas de paso de hormigón armado, Tesis doctoral, Departamento de Ingeniería de la Construcción y Proyectos de Ingeniería Civil, Universidad Politécnica de Valencia, 2009.
- [23] R. Martí, J.M. Moreno, Métodos multiarranque, *Revista Iberoamericana de Inteligencia Artificial* 7 (2003).
- [24] F. Glover, Multi-start and strategic oscillation methods – Principles to exploit adaptive memory, en: M. Laguna, J.L. Gonzalez-Velarde (Eds.), *Computing Tools for Modeling, Optimization and Simulation: Interfaces in Computer Science and Operations Research*, Kluwer, 2000, pp. 1–24.
- [25] J.R. Bitner, G. Ehrlich, E.M. Reingold, Efficient generation of the binary reflected Gray code and its applications, *Communications of the ACM* 19 (1976) 517–521.
- [26] R.B. Hollstein, Artificial Genetic Adaption in Computer Control Systems, Ph.D. Dissertation, Department of Computer and Communication Sciences, University of Michigan, 1971.
- [27] R.A. Caruana, J.D. Schaffer, Representation and Hidden Bias: Gray vs. Binary Coding for Genetic Algorithms, en: J. Laird (Ed.), *Proceedings of the 5<sup>th</sup> International Conference on Machine Learning*, Morgan Kauffman Publ. Inc, 1988, pp. 153–161.
- [28] W.J. Conover, *Practical nonparametric statistics*, Wiley, Nueva York, 1971.