

Análise elastoplástica de estruturas aporticadas com superfícies de interação obtidas por regressão linear múltipla

P.C.S. Vieira^{a,*} e W.T.M. Silva^b

^a ICADS/UFBA, Barreiras, Bahia, Brasil

^b Universidade de Brasília, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, PECC/FT, UnB/DF, Brasil

INFORMAÇÃO SOBRE O ARTIGO

Historial do artigo:

Recebido a 20 de junho de 2011

Aceite a 30 de julho de 2012

On-line a 5 de março de 2013

Palavras-chave:

Funções de escoamento
Curvas de interação
Vigas de Timoshenko 3D
Regressão linear múltipla
Esforços seccionais

Keywords:

Yield functions
Interaction curves
3D Timoshenko beams
Multiple linear regression
Sectional efforts

R E S U M O

Os critérios de estado limite último (superfícies de interação) aplicados para projetos estruturais são de melhor utilidade quando são resultantes de tensões. Existem muitas dificuldades para gerar superfícies de interação com 6 esforços seccionais obtidos por modelos numéricos ou experimentais de uma análise de pórtico espacial. O enfoque, na literatura, para a análise não linear de estruturas com vigas 3D é o uso de superfícies de interação com somente 3 esforços combinados na secção transversal. Portanto, uma melhor compreensão do tipo de carga, das interações entre os 6 esforços e da estabilidade global e local da estrutura são necessárias. As superfícies de interação com 3 esforços são apresentadas em formas planas, quádricas, complexas ou mistas, de modo que as técnicas que usam formulações analíticas com esforços combinados e várias formas de secções são mais ou menos complexas. O modelo de regressão linear múltipla permite tratar esforços resultantes de várias análises para obter uma superfície de escoamento com esforços combinados. Neste trabalho, a formulação para obter superfícies e suas aplicações nas análises de estruturas elastoplásticas de pórticos espaciais são apresentadas.

© 2012 CIMNE (Universitat Politècnica de Catalunya). Publicado por Elsevier España, S.L. Todos os direitos reservados.

Elastoplastic Analysis of Framed Structures with Interaction Surfaces Obtained for Multiple Linear Regression

A B S T R A C T

The ultimate limit state criteria (yielding surfaces) applied to structural designs are easier in stress resultants. There are many difficulties to generating interaction surfaces with six sectional efforts obtained through to numerical or experimental models of a space-frame analysis. The approach, in the literature, to nonlinear analysis of structures with 3D beams is use of interaction surfaces with only three combined efforts in the cross-section. Therefore, a better understanding of load types, of interactions between the six efforts and of local and global stability of structure are necessary. The interaction surfaces with three efforts are presented in planes, quadrics, more complex, or a mixture of them shapes, so that techniques which use analytical formulations with combined efforts and several section shapes are more or less complex. Multiple linear regression allows to treat the resultant efforts of several analyses for obtaining a yielding surface with the combined efforts. In this paper, the formulation to obtaining of the surfaces and their applications in the analysis of elasto-plastic frame structures are presented.

© 2012 CIMNE (Universitat Politècnica de Catalunya). Published by Elsevier España, S.L. All rights reserved.

1. Introdução

Quando é feita uma análise elastoplástica com modelos de viga 3D (fig. 1), necessita-se de uma função da superfície de escoamento que controlará o término da fase elástica e o estado plástico da estrutura. O limite entre a zona elástica e a plástica estabelece-se mediante a superfície de fluência ou superfície de descontinuidade e, a partir deste limite, esta superfície adquire mobilidade

* Autor para correspondência.

Correios eletrónicos: pcsvieira@gmail.com, pedro.vieira@ufba.br (P.C.S. Vieira), taylor@unb.br (W.T.M. Silva).

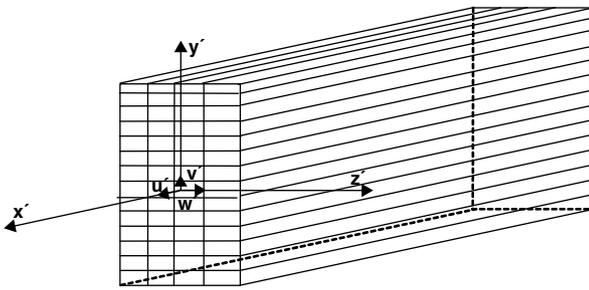


Figura 1. Barra 3D com seção dividida mediante uma malha retangular. Eixos locais.

no espaço de tensões, seguindo a evolução do processo plástico, transformando-se na denominada superfície de carga plástica. Para estabelecer, durante o processo de carga, o início do comportamento inelástico e a posterior evolução das fronteiras do domínio elástico dentro do espaço, adota-se o critério de fluência ou descontinuidade como visto na equação (1). A teoria de viga de Timoshenko 3D e seus detalhes é apresentada, por exemplo, em Hanganu [1]. A formulação do modelo de dano e seus detalhes são discutidos, por exemplo, por Vieira [2], Oller [3] e Hanganu [1].

$$F = \bar{\sigma} - f_c \leq 0 \tag{1}$$

onde: $\bar{\sigma}$ = tensão efetiva e f_c = limite de dano.

Foi utilizado o programa da tese doutoral de Hanganu que trata da metodologia de avaliação da degradação em estruturas de concreto armado (Hanganu [1]), adaptado para o caso de estruturas de aço. A formulação de viga de Timoshenko 3D com o modelo de dano usada pelo programa permite o tipo de análise necessária para a obtenção das superfícies (curvas) de interação, levando em conta a não linearidade física do material com resultados em resultantes de tensão. Uma representação da superfície de degradação é vista na figura 2 (Hanganu [1]). Foram feitas análises, para a validação do programa, de cada esforço seccional de forma a verificar a carga de colapso de cada esforço de forma independente, ou seja, sem levar em conta a interação entre eles. Comprovou-se que o programa pode ser utilizado na proposição de usar a regressão linear múltipla com dados de entrada oriundos destas análises de viga de Timoshenko 3D. Esta abordagem é apresentada em detalhes por Vieira [2].

2. Formulação para a obtenção das superfícies

As curvas de interação em resultantes de tensões facilitam as análises de sistemas estruturais evitando o processo de integração numérica ao longo da seção transversal. Para a obtenção das curvas, em resultantes de tensões, foram utilizados os resultados dos esforços seccionais da análise numérica 3D, apresentados em Vieira [2]. Várias combinações de carregamentos foram usadas para gerar pontos (combinações de esforços) que pertencem a superfície proposta, ou seja, que tenham atingido o escoamento. Para um dado carregamento, obtém-se um ponto, como o ponto 1, cujas

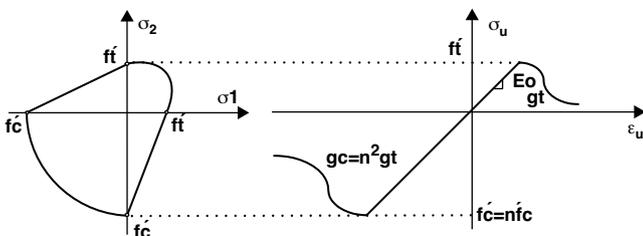


Figura 2. Função limite de dano no plano principal $\sigma_1 - \sigma_2$ [1].

coordenadas (n_1, m_1) são o esforço axial e o momento fletor, respectivamente, na figura (3). A regressão linear múltipla (Montgomery [4]), trata os pontos obtidos pelas diversas análises e obtém a superfície que passa por estes pontos. Isto é retratado, por exemplo, na figura (3). Procura-se obter os valores dos coeficientes constantes das funções, como por exemplo β_1 e β_2 da superfície a ser gerada, como é demonstrado na equação (2):

$$f = \beta_1 n^2 + \beta_2 m - 1 = 0 \tag{2}$$

onde:

- n e m são os esforços normal e fletor adimensionalizados;
- β_1 e β_2 são os coeficientes obtidos através da regressão.

Para tal, é apresentado um exemplo com resultados de análises (tabela 1) obtidas para a equação (2).

Estes dados são tratados pela regressão, de maneira a encontrar os coeficientes β . Com esta formulação, existe a possibilidade de gerar vários tipos de superfícies de interação em resultantes de tensões.

Nesta seção, será apresentada a formulação que trata os dados obtidos até chegar à condição em que possam ser usados pela regressão linear múltipla.

É mais conveniente expressar o modelo com operações matemáticas na forma matricial (Vieira [2]). Suponha-se que existem k variáveis de regressão e n observações ($x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}, y_i$), com $i = 1, 2, \dots, n$ e $j = 1, 2, \dots, k$, e em que o modelo que relaciona os regressores (x_{ik}) com a resposta (y) seja:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_k x_{ik} + \epsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{3}$$

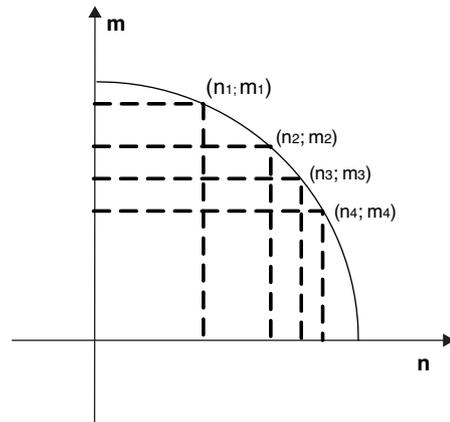


Figura 3. Pontos gerados para criar a função de escoamento.

Tabela 1
Tipo de observações para nm

Observações	
n	m
0,956445	0,040370
0,956445	0,040370
0,301715	0,679861
0,301718	0,679855
0,783473	0,210572
0,783473	0,210570
0,990255	0,008484
0,990255	0,008484
0,080420	0,899851
0,080422	0,899851
0,064067	0,915098
0,064068	0,915098

Este modelo é um sistema de n equações que pode expressar-se em notação matricial como:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon} \tag{4}$$

onde:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{bmatrix} \tag{6}$$

Em geral, \mathbf{y} é um vetor de observações de $(n \times 1)$, \mathbf{X} é um tensor (matriz) de $(n \times p)$ dos níveis das variáveis independentes, $\boldsymbol{\beta}$ é um vetor de $(p \times 1)$ formado pelos coeficientes de regressão e $\boldsymbol{\epsilon}$ é um vetor $(n \times 1)$ dos erros aleatórios.

Deve-se encontrar o vetor dos estimadores dos mínimos quadrados, $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, que minimiza

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^n \epsilon_i^2 = \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\epsilon} = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \tag{7}$$

O estimador de mínimos quadrados $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ é a solução para $\boldsymbol{\beta}$ nas equações

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \mathbf{0} \tag{8}$$

Desenvolvendo-se a equação (8), chega-se a:

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}^T \mathbf{y} \tag{9}$$

As equações (9) são as equações normais dos mínimos quadrados em forma matricial e são idênticas à forma escalar, como é apresentado em (10):

$$\begin{aligned} n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_{i1} + \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^n x_{i2} + \cdots + \hat{\beta}_k \sum_{i=1}^n x_{ik} &= \sum_{i=1}^n y_i \\ \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^n x_{i1} + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_{i1}^2 + \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^n x_{i1}x_{i2} + \cdots + \hat{\beta}_k \sum_{i=1}^n x_{i1}x_{ik} &= \sum_{i=1}^n x_{i1}y_i \\ \vdots & \vdots \\ \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^n x_{ik} + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_{ik}x_{i1} + \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^n x_{ik}x_{i2} + \cdots + \hat{\beta}_k \sum_{i=1}^n x_{ik}^2 &= \sum_{i=1}^n x_{ik}y_i \end{aligned} \tag{10}$$

Para que sejam resolvidas as equações normais, multiplicam-se ambos os membros da equação (9) pela inversa de $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$. Por conseguinte, o estimador de mínimos quadrados de $\boldsymbol{\beta}$ é:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} \tag{11}$$

Note-se que existem $p = k + 1$ equações normais e $p = k + 1$ incógnitas, ou seja, os valores de $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_k$. Por outro lado, a matriz

$\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ não é singular, de modo que se pode empregar os métodos de inversão de matrizes que existem na literatura.

A forma matricial das equações normais de (10) é apresentada na equação (12):

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_{i1} & \sum_{i=1}^n x_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^n x_{ik} \\ \sum_{i=1}^n x_{i1} & \sum_{i=1}^n x_{i1}^2 & \sum_{i=1}^n x_{i1}x_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^n x_{i1}x_{ik} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_{ik} & \sum_{i=1}^n x_{ik}x_{i1} & \sum_{i=1}^n x_{ik}x_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^n x_{ik}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_{i1}y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_{ik}y_i \end{bmatrix} \tag{12}$$

Pode-se observar que a matriz $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ é uma matriz simétrica de $(p \times p)$ e que $\mathbf{X}^T \mathbf{y}$ é um vetor coluna de $(p \times 1)$. Os elementos diagonais da matriz de $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ são as somas dos quadrados dos elementos nas colunas de \mathbf{X} , enquanto que os elementos que estão fora da diagonal principal são as somas dos produtos cruzados dos elementos das colunas de \mathbf{X} (Montgomery [4]). Os elementos de $\mathbf{X}^T \mathbf{y}$ são as somas dos produtos cruzados das colunas de \mathbf{X} e as observações de \mathbf{y} .

O modelo de regressão ajustado tem a seguinte forma:

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \sum_{j=1}^k \hat{\beta}_j x_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{13}$$

A forma matricial do modelo é:

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}} \tag{14}$$

A diferença entre a observação y_i e o valor ajustado \hat{y}_i é um resíduo, $e_i = y_i - \hat{y}_i$. O vetor de resíduos de $(n \times 1)$ denota-se por:

$$\mathbf{e} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} \tag{15}$$

Aplicando a formulação apresentada, tem-se que os dados obtidos (ver tabela 1) são os pontos x_{ij} (ver equação (13)) que fazem parte da superfície a obter. Analisando a figura 3, pode-se observar que existem uma quantidade de pontos cujas coordenadas são em função do n (normal) e do m (fletor). Os esforços seccionais são apresentados, na forma matricial como na equação (5), para os esforços normal, torção e fletores com combinações adimensionais na equação (17):

$$x_{1j} = \left[1 \quad \left(\left(\frac{N}{N_{xp}} \right)^{\alpha 1} \right) \quad \left(\left(\frac{M_x}{M_{xp}} \right)^{\alpha 2} \right) \quad \left(\left(\frac{M_y}{M_{yp}} \right)^{\alpha 3} \right) \quad \left(\left(\frac{M_z}{M_{zp}} \right)^{\alpha 4} \right) \quad \cdots \right] \tag{16}$$

$$= [1 \quad (n^{\alpha_1}) \quad (m_x^{\alpha_2}) \quad (m_y^{\alpha_3}) \quad (m_z^{\alpha_4}) \dots] \quad (17)$$

com $j = 1, 2, \dots, k$
 onde:

- N e N_{xp} são o esforço axial atuante e plástico; M_x e M_{xp} são o momento torçor atuante e plástico (direção x); M_y e M_{yp} são o momento fletor atuante e plástico (direção y), e M_z e M_{zp} são o momento fletor atuante e plástico (direção z);
- α_m são os expoentes dos termos de x_{1j} .

As superfícies de interação podem ser feitas com as mais diversas possibilidades de interação entre esforços. Para o entendimento do processo, é descrito um modelo que leva em conta combinações dos esforços seccionais independentes para pórticos espaciais:

$$f = \beta_1 \left(\frac{N}{N_{xp}}\right)^{\alpha_1} + \beta_2 \left(\frac{M_x}{M_{xp}}\right)^{\alpha_2} + \beta_3 \left(\frac{M_y}{M_{yp}}\right)^{\alpha_3} + \beta_4 \left(\frac{M_z}{M_{zp}}\right)^{\alpha_4} + \beta_6 \left(\frac{N}{N_{xp}}\right)^{\alpha_5} \left(\frac{M_x}{M_{xp}}\right)^{\alpha_6} + \beta_7 \left(\frac{N}{N_{xp}}\right)^{\alpha_7} \left(\frac{M_y}{M_{yp}}\right)^{\alpha_8} + \beta_8 \left(\frac{N}{N_{xp}}\right)^{\alpha_9} \left(\frac{M_z}{M_{zp}}\right)^{\alpha_{10}} + \beta_9 \left(\frac{M_x}{M_{xp}}\right)^{\alpha_{13}} \left(\frac{M_z}{M_{zp}}\right)^{\alpha_{14}} + \beta_{10} \left(\frac{M_y}{M_{yp}}\right)^{\alpha_{15}} \left(\frac{M_z}{M_{zp}}\right)^{\alpha_{16}} - 1 = 0 \quad (18)$$

com

$$x_{i1} = \left(\frac{N}{N_{xp}}\right)^{\alpha_1}, x_{i2} = \left(\frac{M_x}{M_{xp}}\right)^{\alpha_2}, x_{i3} = \left(\frac{M_y}{M_{yp}}\right)^{\alpha_3}, x_{i4} = \left(\frac{M_z}{M_{zp}}\right)^{\alpha_4}, x_{i5} = \left(\frac{N}{N_{xp}}\right)^{\alpha_5} \left(\frac{M_x}{M_{xp}}\right)^{\alpha_6}, x_{i6} = \left(\frac{N}{N_{xp}}\right)^{\alpha_7} \left(\frac{M_y}{M_{yp}}\right)^{\alpha_8}, x_{i7} = \left(\frac{N}{N_{xp}}\right)^{\alpha_9} \left(\frac{M_z}{M_{zp}}\right)^{\alpha_{10}}, x_{i8} = \left(\frac{M_x}{M_{xp}}\right)^{\alpha_{11}} \left(\frac{M_y}{M_{yp}}\right)^{\alpha_{12}}, x_{i9} = \left(\frac{M_x}{M_{xp}}\right)^{\alpha_{13}} \left(\frac{M_z}{M_{zp}}\right)^{\alpha_{14}} \text{ e } x_{i10} = \left(\frac{M_y}{M_{yp}}\right)^{\alpha_{15}} \left(\frac{M_z}{M_{zp}}\right)^{\alpha_{16}} \quad (19)$$

onde: $i = 1, 2, \dots, n$ (análises) e $j = 1, 2, \dots, k$ (combinações de esforços).

As observações de (19) são apresentadas para a regressão linear múltipla, forma matricial, na equação (20):

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nk} \end{bmatrix} \quad (20)$$

onde os termos x_{ij} são os esforços seccionais adimensionais (19), vistos anteriormente. Os α_i são as constantes que determinam o grau da função;

$\left\{ \begin{matrix} N \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{matrix} \right\}$ e $\left\{ \begin{matrix} N_{xp} \\ M_{xp} \\ M_{yp} \\ M_{zp} \end{matrix} \right\}$ são os esforços de cálculo e limites elastoplásticos, respetivamente.

Reapresentando a equação (18) e adotando os seguintes processos:

$$\bar{x}_1 = \left(\frac{N}{N_{xp}}\right)^{\alpha_1}, \bar{x}_2 = \left(\frac{M_x}{M_{xp}}\right)^{\alpha_2}, \bar{x}_3 = \left(\frac{M_y}{M_{yp}}\right)^{\alpha_3}, \bar{x}_4 = \left(\frac{M_z}{M_{zp}}\right)^{\alpha_4}, \bar{x}_5 = \left(\frac{N}{N_{xp}}\right)^{\alpha_5} \left(\frac{M_x}{M_{xp}}\right)^{\alpha_6}, \bar{x}_6 = \left(\frac{N}{N_{xp}}\right)^{\alpha_7} \left(\frac{M_y}{M_{yp}}\right)^{\alpha_8}, \bar{x}_7 = \left(\frac{N}{N_{xp}}\right)^{\alpha_9} \left(\frac{M_z}{M_{zp}}\right)^{\alpha_{10}}, \bar{x}_8 = \left(\frac{M_x}{M_{xp}}\right)^{\alpha_{11}} \left(\frac{M_y}{M_{yp}}\right)^{\alpha_{12}}, \bar{x}_9 = \left(\frac{M_x}{M_{xp}}\right)^{\alpha_{13}} \left(\frac{M_z}{M_{zp}}\right)^{\alpha_{14}} \text{ e } \bar{x}_{10} = \left(\frac{M_y}{M_{yp}}\right)^{\alpha_{15}} \left(\frac{M_z}{M_{zp}}\right)^{\alpha_{16}} \quad (21)$$

$$\text{com } \left(\frac{N}{N_{xp}}\right) = n, \left(\frac{M_x}{M_{xp}}\right) = m_x, \left(\frac{M_y}{M_{yp}}\right) = m_y \text{ e } \left(\frac{M_z}{M_{zp}}\right) = m_z$$

$$1 = \beta_0 + \beta_1 n + \beta_2 m_x + \beta_3 m_y + \beta_4 m_z + \beta_5 n m_x + \beta_6 n m_y + \beta_7 n m_z + \beta_8 m_x m_y + \beta_9 m_x m_z + \beta_{10} m_y m_z$$

Chega-se à equação (22):

Na forma corrente de regressão, obtém-se:

$$1 = \beta_0 + \beta_1 \bar{x}_1 + \beta_2 \bar{x}_2 + \beta_3 \bar{x}_3 + \beta_4 \bar{x}_4 + \beta_5 \bar{x}_5 + \beta_6 \bar{x}_6 + \beta_7 \bar{x}_7 + \beta_8 \bar{x}_8 + \beta_9 \bar{x}_9 + \beta_{10} \bar{x}_{10} \quad (22)$$

A equação (22) mostra uma curva de interação no formato que pode ser utilizado pela regressão linear múltipla (ver eq. (13)).

3. Processo numérico de obtenção das superfícies

Para obtenção das curvas de interação, foram feitas análises numa viga engastada com diversos tipos de carregamentos. Como resultados das diversas análises, encontram-se pontos que alcançam a superfície de escoamento com resultados em resultantes de tensões. Os diversos grupos de esforços adimensionais são tratados pelo método de regressão múltipla, visto anteriormente, para obter uma função de escoamento correspondente às observações. As funções obtidas pelo processo numérico são comparadas com as apresentadas na literatura para verificar a aplicabilidade do método (Vieira [2]). As propriedades da viga engastada (ver fig. 4 e tabela 2), como dimensões da secção transversal e comprimento, foram padronizadas para se obter uma comparação entre as funções obtidas. Os limites plásticos para a secção foram obtidos em função das fórmulas da literatura. O nível de dano (d) do elemento, em que foram retirados os esforços, variou de 60 a 99%. Esta variação do nível do dano dependeu da convergência de cada análise. O elemento em que foram retiradas as observações (esforços seccionais) e observados os níveis de plastificação da secção foi o que tem a condição de contorno

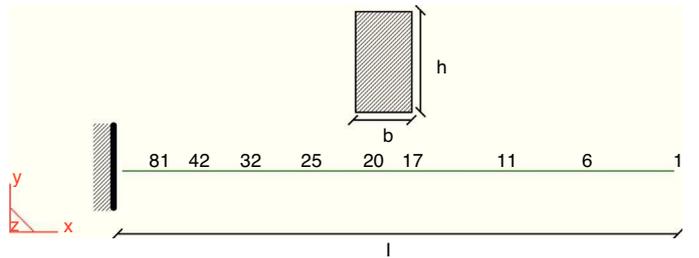


Figura 4. Viga engastada.

Tabela 2
 Propriedades do elemento engastado

Propriedades do elemento engastado		
Descrição	Valor adotado	Unidade
Módulo de Young	2, 1e6	kgf/cm ²
Módulo de Poisson	0, 3	-
Densidade	7, 85e - 6	kgf/cm ³
Limite de compressão	2, 4e3	kgf/cm ²
Limite de tração	2, 4e3	kgf/cm ²
Energia de fratura (dano)	1, 0e7	kgf . cm
Largura da secção (b)	4, 2	cm
Altura da secção (h)	8, 0	cm
Comprimento (l)	200, 0	cm
N_{xp} compressão	18410, 959	kgf
N_{xp} tração	80640, 0	kgf
M_{xp}	80660, 916	kgf . cm
M_{yp}	161280, 0	kgf . cm
M_{zp}	84600, 0	kgf . cm

engastada. Para cada análise, foram extraídos os esforços adimensionais dos 2 (dois) pontos de Gauss como em Vieira [2]. A função f é a apresentada pela literatura e função f_u é a obtida no presente trabalho. Foram geradas várias malhas de acordo com a necessidade do exemplo tratado. O número de elementos foi obtido através de testes para verificar a convergência da solução. O exemplo 3.1 foi a base das funções usadas nas análises elasto-plásticas.

3.1. Exemplo 3.1

Neste caso, procura-se uma função que estabeleça a interação entre os esforços seccionais: axial (N) e fletores (M_y, M_z). Considera-se a viga engastada, vista na figura 4, com as propriedades padrões da tabela 2. Foram aplicadas várias combinações de translações e rotações impostas no nó 1 (ver fig. 4) para a obtenção dos grupos de esforços seccionais adimensionais da curva de interação. Foram testadas interações nas duas direções dos momentos. As propriedades particulares do exemplo são apresentadas na tabela 3.

Foram testadas análises com os dados conjuntos das 2 direções e verificou-se que se pode propor as funções a seguir, analisadas de maneira mais completa em [2].

• $n^2 \times m$

$$f_u = 1,007n^2 + 1,025m - 1 = 0 \quad (23)$$

• $n \times m^2$

$$f_u = 1,063n + 0,907m^2 - 1 = 0 \quad (24)$$

• $n^2 \times m^2$ desacoplado

$$f_u = 1,164n^2 + 1,127m^2 - 1 = 0 \quad (25)$$

• $n^2 \times m^2$ acoplado

$$f_u = 1,035n^2 + 0,880nm + 0,812m^2 - 1 = 0 \quad (26)$$

Tabela 3

Propriedades particulares do exemplo modelo.

Propriedades do exemplo 3.1	
Descrição	Valor adotado
Número de elementos	50
Número de nós da malha	101
Número de divisões seccionais	8
Número de análises	6
Deslocamentos impostos (cm)	
u_x	u_z
0,10	10,00
0,20	12,00
0,30	14,00
0,60	18,00
0,90	18,00
0,50	20,00
u_x	u_y
0,24	7,68
1,33	82,34
1,40	69,52
0,03	13,77
0,06	14,41
0,45	37,44

4. Análise elasto-plástica de estruturas apertadas

Foram feitas aplicações baseadas na teoria da elasto-plasticidade em estruturas apertadas com o objetivo de analisar o comportamento das superfícies geradas. A seguir, é mostrada a teoria envolvida na utilização de superfícies em resultantes de tensão.

Uma superfície de interação define o estado último de uma secção transversal e depende dos seguintes fatores:

1. Forma geométrica da secção transversal;
2. Combinação dos esforços seccionais que atuam na secção transversal;
3. Teoria de viga utilizada.

Encontram-se soluções analíticas fechadas para determinados tipos de secções (I, retangular, etc.) com casos especiais de combinações de esforços, tais como momentos fletores e esforço normal (Horne [5], Neal [6]). Neste trabalho, assume-se uma superfície descrita em função dos esforços seccionais (Silva [7]), com base na equação (ver eq. (27)), apresentada com as seguintes combinações de esforços seccionais:

$$f = \beta_1 \left(\frac{|F_x|}{F_{xp}} \right)^{\alpha_1} + \beta_2 \left(\frac{|F_y|}{F_{yp}} \right)^{\alpha_2} + \beta_3 \left(\frac{|F_z|}{F_{zp}} \right)^{\alpha_3} + \beta_4 \left(\frac{|M_x|}{M_{xp}} \right)^{\alpha_4} + \beta_5 \left(\frac{|M_y|}{M_{yp}} \right)^{\alpha_5} + \beta_6 \left(\frac{|M_z|}{M_{zp}} \right)^{\alpha_6} + \beta_7 \left(\frac{|F_x|}{F_{xp}} \right)^{\alpha_7} \left(\frac{|M_y|}{M_{yp}} \right)^{\alpha_8} + \beta_8 \left(\frac{|F_x|}{F_{xp}} \right)^{\alpha_9} \left(\frac{|M_z|}{M_{zp}} \right)^{\alpha_{10}} - 1 = 0 \quad (27)$$

onde F_x é o esforço axial, F_y e F_z são os esforços cortantes, M_x é o momento torçor e M_y e M_z são os momentos fletores. F_{xp} é o esforço normal de plastificação puro, F_{yp} e F_{zp} são os esforços cortantes de plastificação puros, M_{xp} é o momento torçor de plastificação puro, M_{yp} e M_{zp} são os momentos fletores de plastificação puros. As constantes β_i reais positivas são obtidas de observações oriundas das análises do modelo de dano em viga de Timoshenko 3D que levam em conta as propriedades da forma geométrica da secção transversal. Os expoentes $\alpha_i \geq 1$ são arbitrados em função do tipo de função desejada. Dentro do contexto da análise elasto-plástica perfeita de estruturas, Silva [7] considera que:

1. Os esforços seccionais contidos no interior da superfície de interação geram somente deformações elásticas;
2. Os esforços seccionais que estejam na superfície de interação geram deformações plásticas;
3. Os esforços seccionais fora da superfície de interação representam estados de tensões inadmissíveis porque não se leva em conta o caso do endurecimento.

Durante o processo de aplicação do carregamento em passos de carga, os esforços seccionais em alguns nós dos elementos da estrutura poderão sair da superfície de interação. Para trazer estes esforços seccionais de volta à superfície, utiliza-se o método de Backward Euler, que necessita das derivadas primeira e segunda da superfície em relação aos esforços seccionais.

4.1. Derivadas de primeira ordem

Com base na equação (27), obtêm-se as derivadas de primeira ordem da superfície de interação (Silva [7]), em relação aos esforços

seccionais:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial F_x} &= \beta_1 \alpha_1 \frac{|F_x|^{\alpha_1-1}}{F_{xp}^{\alpha_1}} \text{sign}_x f_x + \beta_7 \alpha_7 \frac{|F_x|^{\alpha_7-1}}{F_{xp}^{\alpha_7}} \text{sign}_x f_x \left(\frac{|M_y|}{M_{yp}} \right)^{\alpha_8} \\ &+ \beta_8 \alpha_9 \frac{|F_x|^{\alpha_9-1}}{F_{xp}^{\alpha_9}} \text{sign}_x f_x \left(\frac{|M_z|}{M_{zp}} \right)^{\alpha_{10}} \\ \frac{\partial f}{\partial F_y} &= \beta_2 \alpha_2 \frac{|F_y|^{\alpha_2-1}}{F_{yp}^{\alpha_2}} \text{sign}_y f_y \\ \frac{\partial f}{\partial F_z} &= \beta_3 \alpha_3 \frac{|F_z|^{\alpha_3-1}}{F_{zp}^{\alpha_3}} \text{sign}_z f_z \\ \frac{\partial f}{\partial M_x} &= \beta_4 \alpha_4 \frac{|M_x|^{\alpha_4-1}}{M_{xp}^{\alpha_4}} \text{sign}_x m_x \\ \frac{\partial f}{\partial M_y} &= \beta_5 \alpha_5 \frac{|M_y|^{\alpha_5-1}}{M_{yp}^{\alpha_5}} \text{sign}_y m_y + \beta_7 \alpha_8 \left(\frac{|F_x|}{F_{xp}} \right)^{\alpha_7} \text{sign}_x m_y \frac{|M_y|^{\alpha_8-1}}{M_{yp}^{\alpha_8}} \\ \frac{\partial f}{\partial M_z} &= \beta_6 \alpha_6 \frac{|M_z|^{\alpha_6-1}}{M_{zp}^{\alpha_6}} \text{sign}_z m_z + \beta_8 \alpha_{10} \left(\frac{|F_x|}{F_{xp}} \right)^{\alpha_9} \text{sign}_x m_z \frac{|M_z|^{\alpha_{10}-1}}{M_{zp}^{\alpha_{10}}} \end{aligned} \quad (28)$$

onde $\text{sign}_i f_i = \frac{|F_i|}{F_{ip}}$ e $\text{sign}_i m_i = \frac{|M_i|}{M_{ip}}$ denotam os sinais das componen-

tes do vetor de esforços nodais com $F_i = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix}$ e $F_{ip} = \begin{Bmatrix} F_{xp} \\ F_{yp} \\ F_{zp} \end{Bmatrix}$;

$M_i = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix}$ e $M_{ip} = \begin{Bmatrix} M_{xp} \\ M_{yp} \\ M_{zp} \end{Bmatrix}$.

A superfície de interação é assumida como um potencial plástico (Lublinter [8]). As componentes são apresentadas na forma matricial para cada nó do elemento e definem o fluxo plástico nos nós do elemento durante o processo de carga. Têm-se, a seguir, os vetores para cada nó do elemento:

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 = \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial F_{x1}} \\ \frac{\partial f}{\partial F_{y1}} \\ \frac{\partial f}{\partial F_{z1}} \\ \frac{\partial f}{\partial M_{x1}} \\ \frac{\partial f}{\partial M_{y1}} \\ \frac{\partial f}{\partial M_{z1}} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}; \quad \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_2 = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \frac{\partial f}{\partial F_{x2}} \\ \frac{\partial f}{\partial F_{y2}} \\ \frac{\partial f}{\partial F_{z2}} \\ \frac{\partial f}{\partial M_{x2}} \\ \frac{\partial f}{\partial M_{y2}} \\ \frac{\partial f}{\partial M_{z2}} \end{Bmatrix} \quad (29)$$

onde $\mathbf{0}$ é um vetor nulo de 6×1 .

4.2. Derivadas de segunda ordem

O gradiente do vetor de fluxo plástico é obtido através da diferenciação de cada componente do vetor da equação (29) em relação aos esforços seccionais. Desenvolvendo-se as derivadas em função da equação (28), são apresentadas, a seguir, as segundas derivadas:

Para $\partial F_x F_k$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial F_x \partial F_x} &= \beta_1 (\alpha_1^2 - \alpha_1) \frac{|F_x|^{\alpha_1-2}}{F_{xp}^{\alpha_1}} + \beta_7 (\alpha_7^2 - \alpha_7) \frac{|F_x|^{\alpha_7-2}}{F_{xp}^{\alpha_7}} \frac{|M_y|^{\alpha_8}}{M_{yp}^{\alpha_8}} \\ &+ \beta_8 (\alpha_9^2 - \alpha_9) \frac{|F_x|^{\alpha_9-2}}{F_{xp}^{\alpha_9}} \frac{|M_y|^{\alpha_{10}}}{M_{yp}^{\alpha_{10}}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial F_x \partial F_y} &= 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial F_x \partial F_z} = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial F_x \partial M_x} = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial F_x \partial M_y} &= \beta_7 \alpha_7 \alpha_8 \frac{|F_x|^{\alpha_7-1}}{F_{xp}^{\alpha_7}} \text{sign}_x f_x \frac{|M_y|^{\alpha_8-1}}{M_{yp}^{\alpha_8}} \text{sign}_y m_y \\ \frac{\partial^2 f}{\partial F_x \partial M_z} &= \beta_8 \alpha_9 \alpha_{10} \frac{|F_x|^{\alpha_9-1}}{F_{xp}^{\alpha_9}} \text{sign}_x f_x \frac{|M_z|^{\alpha_{10}-1}}{M_{zp}^{\alpha_{10}}} \text{sign}_z m_z \end{aligned} \quad (30)$$

Para $\partial F_y F_k$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial F_y \partial F_x} &= 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial F_y \partial F_y} &= \beta_2 (\alpha_2^2 - \alpha_2) \frac{|F_y|^{\alpha_2-2}}{F_{yp}^{\alpha_2}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial F_y \partial F_z} &= 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial F_y \partial M_x} = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial F_y \partial M_y} = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial F_y \partial M_z} = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

Para $\partial F_z F_k$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial F_z \partial F_x} &= 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial F_z \partial F_y} = 0; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial F_z \partial F_z} &= \beta_3 (\alpha_3^2 - \alpha_3) \frac{|F_z|^{\alpha_3-2}}{F_{zp}^{\alpha_3}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial F_z \partial M_x} &= 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial F_z \partial M_y} = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial F_z \partial M_z} = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

Para $\partial M_x F_k$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial M_x \partial F_x} &= 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial M_x \partial F_y} = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial M_x \partial F_z} = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial M_x \partial M_x} &= \beta_4 (\alpha_4^2 - \alpha_4) \frac{|M_x|^{\alpha_4-2}}{M_{xp}^{\alpha_4}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial M_x \partial M_y} &= 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial M_x \partial M_z} = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

Para $\partial M_y F_k$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial M_y \partial F_x} &= \beta_7 \alpha_7 \alpha_8 \frac{|F_x|^{\alpha_7-1}}{F_{xp}^{\alpha_7}} \text{sign}_x f_x \frac{|M_y|^{\alpha_8-1}}{M_{yp}^{\alpha_8}} \text{sign}_y m_y \\ \frac{\partial^2 f}{\partial M_y \partial F_y} &= 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial M_y \partial F_z} = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial M_y \partial M_x} = 0; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial M_y \partial M_y} &= \beta_5 (\alpha_5^2 - \alpha_5) \frac{|M_y|^{\alpha_5-2}}{M_{yp}^{\alpha_5}} + \beta_7 (\alpha_8^2 - \alpha_8) \frac{|F_x|^{\alpha_7}}{F_{xp}^{\alpha_7}} \frac{|M_y|^{\alpha_8-2}}{M_{yp}^{\alpha_8}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial M_y \partial M_z} &= 0 \end{aligned} \quad (34)$$

Para $\partial M_z F_k$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial M_z \partial F_x} &= \beta_8 \alpha_9 \alpha_{10} \frac{|F_x|^{\alpha_9 - 1} \text{sign} f_x}{F_{xp}^{\alpha_9}} \frac{|M_z|^{\alpha_{10} - 1} \text{sign} m_z}{M_{zp}^{\alpha_{10}}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial M_z \partial F_y} &= 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial M_z \partial F_z} = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial M_z \partial M_x} = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial M_z \partial M_y} = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial M_z \partial M_z} &= \beta_6 (\alpha_6^2 - \alpha_6) \frac{|M_z|^{\alpha_6 - 2}}{M_{zp}^{\alpha_6}} + \beta_8 (\alpha_{10}^2 - \alpha_{10}) \frac{|F_x|^{\alpha_9}}{F_{xp}^{\alpha_9}} \frac{|M_z|^{\alpha_{10} - 2}}{M_{zp}^{\alpha_{10}}} \end{aligned} \quad (35)$$

As segundas derivadas na forma matricial representam o gradiente do fluxo plástico para cada nó do elemento (Silva [7]):

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial F_{x_1} \partial F_{x_1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial F_{x_1} \partial F_{y_1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial F_{x_1} \partial F_{z_1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial F_{x_1} \partial M_{x_1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial F_{x_1} \partial M_{y_1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial F_{x_1} \partial M_{z_1}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial F_{y_1} \partial F_{x_1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial F_{y_1} \partial F_{y_1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial F_{y_1} \partial F_{z_1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial F_{y_1} \partial M_{x_1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial F_{y_1} \partial M_{y_1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial F_{y_1} \partial M_{z_1}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial F_{z_1} \partial F_{x_1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial F_{z_1} \partial F_{y_1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial F_{z_1} \partial F_{z_1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial F_{z_1} \partial M_{x_1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial F_{z_1} \partial M_{y_1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial F_{z_1} \partial M_{z_1}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial M_{x_1} \partial F_{x_1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial M_{x_1} \partial F_{y_1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial M_{x_1} \partial F_{z_1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial M_{x_1} \partial M_{x_1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial M_{x_1} \partial M_{y_1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial M_{x_1} \partial M_{z_1}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial M_{y_1} \partial F_{x_1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial M_{y_1} \partial F_{y_1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial M_{y_1} \partial F_{z_1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial M_{y_1} \partial M_{x_1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial M_{y_1} \partial M_{y_1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial M_{y_1} \partial M_{z_1}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial M_{z_1} \partial F_{x_1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial M_{z_1} \partial F_{y_1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial M_{z_1} \partial F_{z_1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial M_{z_1} \partial M_{x_1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial M_{z_1} \partial M_{y_1}} & \frac{\partial^2 f}{\partial M_{z_1} \partial M_{z_1}} \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial F_j \partial F_k} \right]_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial F_{x_2} \partial F_{x_2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial F_{x_2} \partial F_{y_2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial F_{x_2} \partial F_{z_2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial F_{x_2} \partial M_{x_2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial F_{x_2} \partial M_{y_2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial F_{x_2} \partial M_{z_2}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial F_{y_2} \partial F_{x_2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial F_{y_2} \partial F_{y_2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial F_{y_2} \partial F_{z_2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial F_{y_2} \partial M_{x_2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial F_{y_2} \partial M_{y_2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial F_{y_2} \partial M_{z_2}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial F_{z_2} \partial F_{x_2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial F_{z_2} \partial F_{y_2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial F_{z_2} \partial F_{z_2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial F_{z_2} \partial M_{x_2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial F_{z_2} \partial M_{y_2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial F_{z_2} \partial M_{z_2}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial M_{x_2} \partial F_{x_2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial M_{x_2} \partial F_{y_2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial M_{x_2} \partial F_{z_2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial M_{x_2} \partial M_{x_2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial M_{x_2} \partial M_{y_2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial M_{x_2} \partial M_{z_2}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial M_{y_2} \partial F_{x_2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial M_{y_2} \partial F_{y_2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial M_{y_2} \partial F_{z_2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial M_{y_2} \partial M_{x_2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial M_{y_2} \partial M_{y_2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial M_{y_2} \partial M_{z_2}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial M_{z_2} \partial F_{x_2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial M_{z_2} \partial F_{y_2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial M_{z_2} \partial F_{z_2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial M_{z_2} \partial M_{x_2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial M_{z_2} \partial M_{y_2}} & \frac{\partial^2 f}{\partial M_{z_2} \partial M_{z_2}} \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial F_j \partial F_k} \right]_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \quad (39)$$

onde $\mathbf{0}$ é uma matriz 6×6 com elementos nulos.

4.3. Algoritmo de retorno

Na aplicação do carregamento da estrutura, os esforços seccionais atingem, num ou em ambos os nós do elemento de viga, um estado que sai da superfície de interação, formando-se rótulas plásticas. Neste caso, aplica-se o método de Backward Euler para trazer de volta os esforços seccionais à superfície de interação. Portanto, assume-se, inicialmente, que exista uma combinação de esforços seccionais num dos nós do elemento que esteja fora da superfície de

interação (visto em Silva [7]). Utilizando-se o método de backward Euler, corrige-se o vetor de forças nodais da forma seguinte:

$$\hat{F}_i = F_i^{trial} - \lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 \quad (40)$$

onde $F_i^{trial} = \bar{F}_i + K_{ij} dU_j$ corresponde a um vetor de forças nodais estimado. Este vetor é obtido através de uma solução elástica dos incrementos de deslocamentos dU_j e da matriz de rigidez linear elástica K_{ij} do elemento de viga 3D (fig. 1). \bar{F}_i é o vetor de forças nodais do último passo de carga convergido. O vetor \bar{F}_i está dentro ou fora da superfície de interação. Por outro lado, $\left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1$ é o vetor de fluxo plástico definido em relação aos esforços seccionais que estão fora da superfície de interação e λ_1 é o multiplicador plástico, tal que $\lambda_1 \geq 0$.

Geralmente, os vetores de forças nodais, estimado F_i^{trial} e corrigido \hat{F}_i , não satisfazem o critério de escoamento, isto é, não estão sobre a superfície de interação. Assim, torna-se necessário um tipo de processo iterativo para trazer o estado de tensão (esforços seccionais) de volta à superfície de interação (ver fig. 5).

4.3.1. Algoritmo de retorno com 1 (um) vetor

Ao ocorrer a situação de somente uma rótula plástica no elemento de viga, emprega-se somente um vetor de fluxo plástico correspondente aos esforços seccionais que se encontra fora da superfície de interação (ver fig. 5).

O processo iterativo utiliza vetores de fluxo plástico atualizados para se aproximar da superfície. Este procedimento é chamado de algoritmo de retorno, sendo que, neste caso, é feito com um vetor. Na figura 5, encontra-se a interpretação geométrica do algoritmo de retorno (Silva [7]). Admite-se que os vetores de força nodais F_i (atual) e \hat{F}_i (corrigido) não cumprem o critério de escoamento, ou seja, $f(F_i) > 1$ e $f(\hat{F}_i) > 1$. Com isso, o vetor de forças residuais r_i , baseado na equação (40), é definido como:

$$r_i = F_i - \hat{F}_i = F_i - \left(F_i^{trial} - \lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 \right) \quad (41)$$

Expandindo a equação (41) numa série de Taylor até os termos de primeira ordem e mantendo o vetor de forças nodais de partida F_i^{trial} fixo, obtém-se um novo vetor de forças residuais r_i^{new} . Este novo vetor é apresentado da forma seguinte:

$$r_i^{new} = r_i^{old} + dF_i + d\lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 + \lambda_1 K_{ij} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial F_j \partial F_k} \right]_1 dF_k \quad (42)$$

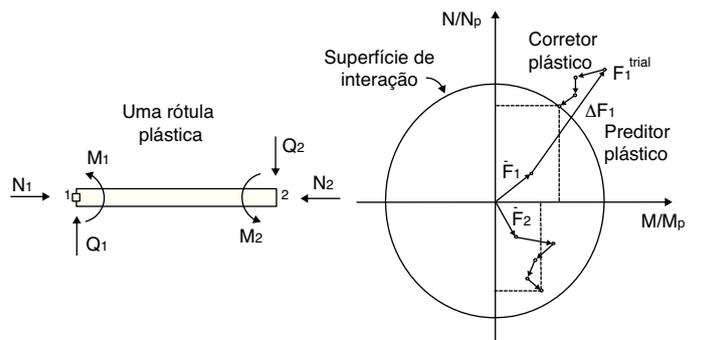


Figura 5. Retorno à superfície com um vetor (ver Silva [7]).

onde dF_i é uma variação em F_i , $d\lambda_1$ é uma variação em λ_1 e $\left[\frac{\partial^2 f}{\partial F_j \partial F_k} \right] dF_k$ é uma variação em $\left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1$. Aplicando a condição: $r_i^{new} = 0$, a equação (42) é reapresentada a seguir:

$$0 = r_i^{old} + d\lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 + \left(\delta_{ik} + \lambda_1 K_{ij} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial F_j \partial F_k} \right]_1 \right) dF_k \quad (43)$$

Definindo a matriz Q_{ik} como segue:

$$Q_{ik} = \delta_{ik} + \lambda_1 K_{ij} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial F_j \partial F_k} \right]_1 \quad (44)$$

Aplicam-se manipulações indiciais nas equações (43) e (44) para determinar a correção do vetor de forças nodais, dF_i , na iteração atual, chegando a:

$$Q_{ii} dF_i = - \left(r_i^{old} + d\lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 \right) \quad (45)$$

$$dF_i = -Q_{ii}^{-1} \left(r_i^{old} + d\lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 \right) \quad (46)$$

Expandindo a função de escoamento (interação), f , numa série de Taylor até os termos de primeira ordem em torno do vetor de forças nodais final F_i , tem-se que

$$f_1^{new} = f_1^{old} + \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_1 dF_i \quad (47)$$

Impondo que $f_1^{new} = 0$ na equação (47) e usando a equação (46), obtém-se a correção do multiplicador plástico, na iteração atual, como segue:

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_1 dF_i = -f_1^{old} \quad (48)$$

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_1 \left[-Q_{ii}^{-1} \left(r_i^{old} + d\lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 \right) \right] = -f_1^{old} \quad (49)$$

$$-\left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_1 Q_{ii}^{-1} \left(d\lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 \right) = -f_1^{old} + \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_1 Q_{ii}^{-1} r_i^{old} \quad (50)$$

$$d\lambda_1 = \frac{f_1^{old} - \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_1 Q_{ii}^{-1} r_i^{old}}{\left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_1 Q_{ii}^{-1} K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1} \quad (51)$$

Este procedimento iterativo termina quando são alcançados os critérios de parada adotados:

$$r^{norm} = \sqrt{\frac{\|r_i\|}{\|F_i^{trial}\|}} < TOL \quad f^{norm} = |f - 1, 0| < TOL \quad (52)$$

onde $\|r_i\|$ é a norma euclidiana do vetor de forças residuais, $\|F_i^{trial}\|$ é a norma euclidiana do vetor de forças estimado e TOL é a tolerância para a convergência.

4.3.2. Algoritmo de retorno com 2 (dois) vetores

Para o caso da formação de 2 rótulas plásticas no elemento de viga, são utilizados 2 vetores de fluxo plástico com um vetor para cada nó, ou seja, $\left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1$ e $\left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_2$. Os vetores de fluxo são os esforços seccionais de cada nó, que estão fora da superfície de interação, isto é, $f_1(F_j) > 1$ e $f_2(F_j) > 1$. Durante o processo iterativo utilizam-se esses vetores de fluxo plástico atualizados para a aproximação da superfície de interação. Este procedimento é chamado algoritmo de retorno com 2 (dois) vetores. A interpretação geométrica do algoritmo é vista na figura 6. Define-se o vetor de forças nodais de partida como: $F_i^{trial} = \bar{F}_i + K_{ij} dU_j$, onde \bar{F}_i é o vetor

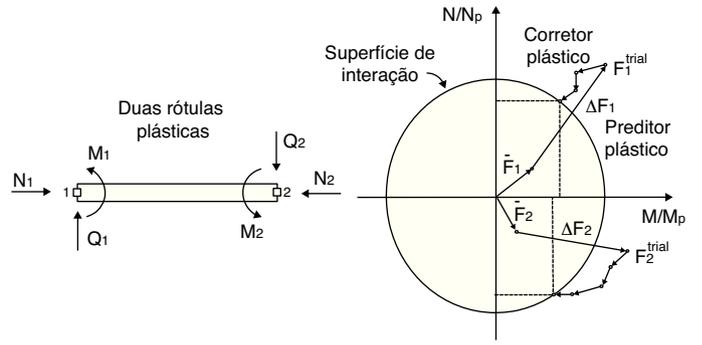


Figura 6. Retorno a superfície com 2 vetores (Silva [7]).

de forças nodais do último passo de carga convergido. O vetor \bar{F}_i estará dentro ou fora da superfície de interação, ou seja, $f(\bar{F}_i) < 1$ ou $f(\bar{F}_i) = 1$, respetivamente. O vetor de forças nodais corrigido expressa-se como:

$$\hat{F}_i = F_i^{trial} - \lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 - \lambda_2 K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_2 \quad (53)$$

onde λ_1 e λ_2 são os multiplicadores plásticos, sendo que $\lambda_1 \geq 0$ e $\lambda_2 \geq 0$. Admite-se que os vetores de forças nodais atual (\mathbf{F}) e corrigido ($\hat{\mathbf{F}}$) não cumprem a condição de escoamento com $f(F_i) > 1$ e $f(\hat{F}_i) > 1$. Define-se o vetor de forças nodais \mathbf{r} como:

$$r_i = F_i - \hat{F}_i = F_i - \left(F_i^{trial} - \lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 - \lambda_2 K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_2 \right) \quad (54)$$

Expandindo a equação (54) em série de Taylor até os termos de primeira ordem e mantendo fixo o vetor de forças nodais F_i^{trial} , obtém-se um novo vetor de forças residuais r_i^{new} , que é apresentado na equação (55):

$$r_i^{new} = r_i^{old} + dF_i + d\lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 + \lambda_1 K_{ij} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial F_j \partial F_k} \right]_1 dF_k + d\lambda_2 K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_2 + \lambda_2 K_{ij} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial F_j \partial F_k} \right]_2 dF_k \quad (55)$$

Impondo-se a condição $r_i^{new} = 0$, a equação (55) pode ser reescrita como:

$$0 = r_i^{old} + d\lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 + d\lambda_2 K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_2 + \left(\delta_{ik} + \lambda_1 K_{ij} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial F_j \partial F_k} \right]_1 + \lambda_2 K_{ij} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial F_j \partial F_k} \right]_2 \right) dF_k \quad (56)$$

Define-se a matriz Q_{ik} como:

$$Q_{ik} = \delta_{ik} + \lambda_1 K_{ij} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial F_j \partial F_k} \right]_1 + \lambda_2 K_{ij} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial F_j \partial F_k} \right]_2 \quad (57)$$

Aplicam-se, como anteriormente, manipulações indiciais nas equações (55), (56) e (57) para a obtenção do vetor de forças nodais da iteração atual:

$$Q_{ii} dF_i = - \left(r_i^{old} + d\lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 + d\lambda_2 K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_2 \right) \quad (58)$$

$$dF_i = -Q_{ii}^{-1} \left(r_i^{old} + d\lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 + d\lambda_2 K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_2 \right) \quad (59)$$

Expandindo-se as funções de escoamento no nó 1, f_1 , e no nó 2, f_2 , em série de Taylor até aos termos de primeira ordem em torno do vetor de forças nodais final F_k , chega-se a:

$$f_1^{new} = f_1^{old} + \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_1 dF_i, f_2^{new} = f_2^{old} + \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_2 dF_i \quad (60)$$

Aplicando a equação (59) nas funções da equação (60) e impondo que $f_1^{new} = 0$ e $f_2^{new} = 0$, tem-se que:

$$f_m^{old} - \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_m Q_{il}^{-1} r_l^{old} = d\lambda_1 \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_m Q_{il}^{-1} K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 + d\lambda_2 \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_m Q_{il}^{-1} K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_2 \quad (61)$$

com $m = 1, 2$

As incógnitas são as correções dos multiplicadores plásticos $d\lambda_1$ e $d\lambda_2$ durante o processo iterativo (Silva [7]). Colocando as equações (61) no sistema matricial:

$$\begin{bmatrix} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_1 Q_{il}^{-1} K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 & \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_1 Q_{il}^{-1} K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_2 \\ \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_2 Q_{il}^{-1} K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 & \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_2 Q_{il}^{-1} K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\lambda_1 \\ d\lambda_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{old} - \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_1 Q_{il}^{-1} r_l^{old} \\ f_2^{old} - \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_2 Q_{il}^{-1} r_l^{old} \end{Bmatrix} \quad (62)$$

Reapresentado a equação (62) da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\lambda_1 \\ d\lambda_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} \quad (63)$$

Solucionando o sistema da equação (63), obtém-se que:

$$\mathbf{a}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{b} \quad (64)$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{a}^{-1}\mathbf{b} \quad (65)$$

com

$$\mathbf{a}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} & -\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} & \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{bmatrix} \quad (66)$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{bmatrix} \quad (67)$$

$$\begin{bmatrix} d\lambda_1 \\ d\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a_{22} \left(f_1^{old} - \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_1 Q_{il}^{-1} r_l^{old} \right) - a_{12} \left(f_2^{old} - \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_2 Q_{il}^{-1} r_l^{old} \right)}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ \frac{a_{11} \left(f_2^{old} - \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_2 Q_{il}^{-1} r_l^{old} \right) - a_{21} \left(f_1^{old} - \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_1 Q_{il}^{-1} r_l^{old} \right)}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{bmatrix} \quad (68)$$

O processo iterativo termina quando são cumpridos os seguintes critérios de parada:

$$r^{norm} = \sqrt{\frac{\|r_i\|}{\|F_i^{trial}\|}} < TOL,$$

$$f_1^{norm} = |f_1 - 1, 0| < TOL,$$

$$f_2^{norm} = |f_2 - 1, 0| < TOL \quad (69)$$

4.4. Matriz de rigidez consistente

No processo incremental-iterativo, é utilizado, na fase corretora, o método de Newton-Raphson para determinar a configuração de equilíbrio do sistema estrutural (Silva [7]). Para não destruir a convergência quadrática do método, há necessidade da obtenção de uma matriz de rigidez consistente de forma que sejam apresentados os casos para 1 (um) vetor e 2 (dois) vetores. Na situação de uma rótula plástica, utiliza-se o algoritmo com um vetor e, para duas, o algoritmo com dois vetores. Ao alcançar a convergência atendendo aos critérios adotados nas equações (52) e (69), atualiza-se a matriz de rigidez consistente ao início de cada passo de carga (ver fig. 7).

4.4.1. Algoritmo de retorno com um vetor

Para trazer os esforços seccionais à superfície de interação, no final do processo iterativo, define-se a seguinte correção:

$$F_i = F_i^{trial} - \lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1, \text{ com } \lambda_1 > 0 \quad (70)$$

e para o vetor de forças nodais de partida (inicial), define-se como:

$$F_i^{trial} = \bar{F}_i + K_{ij} dU_j \quad (71)$$

Aplicando-se o diferencial total na equação (70), eq. (42), chega-se a:

$$dF_i = K_{ij} dU_j - d\lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 - \lambda_1 K_{ij} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial F_j \partial F_k} \right]_1 dF_k \quad (72)$$

Desenvolvendo a equação (72), obtém-se que:

$$\left(\delta_{ik} + \lambda_1 K_{ij} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial F_j \partial F_k} \right]_1 \right) dF_k = K_{ij} dU_j - d\lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 \quad (73)$$

Utilizando a matriz Q_{ik} definida na equação (44) e definindo que a matriz de redução plástica seja igual a:

$$R_{ij} = Q_{il}^{-1} K_{lj} \quad (74)$$

Com isso, reescreve-se a equação (73) da seguinte forma:

$$dF_i = R_{ij} \left(dU_j - d\lambda_1 \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 \right) \quad (75)$$

A equação (75) é semelhante à forma não consistente, sendo diferente no termo K_{ij} em relação ao $R_{ij} = Q_{il}^{-1} K_{lj}$ e no facto de o vetor de fluxo plástico ser avaliado no ponto de retorno à superfície de interação (Silva [7]). Como o vetor de forças nodais final, F_i tem de

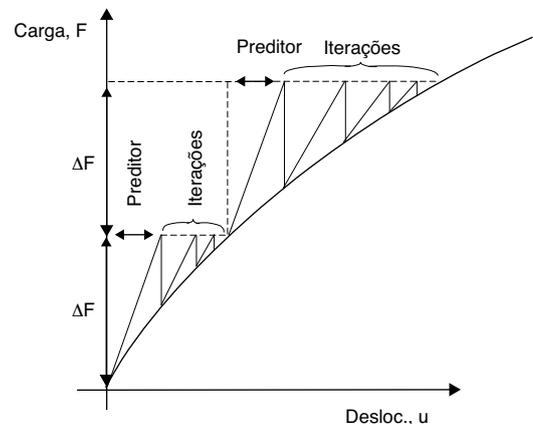


Figura 7. Procedimento incremental-iterativo de Newton-Raphson como visto em Crisfield [9].

cumprir a condição $f(F_i) = 0$, diferencia-se esta condição e tem-se por base a equação (75), de maneira que

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_1 dF_i = 0 \quad (76)$$

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_1 R_{ij} \left(dU_j - d\lambda_1 \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 \right) = 0 \quad (77)$$

Desenvolvendo a equação anterior para a obtenção do multiplicador plástico ($d\lambda_1$), obtém-se:

$$d\lambda_1 = \frac{\left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_1 R_{ij} dU_j}{\left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_1 R_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1} \quad (78)$$

A matriz de rigidez elasto-plástica consistente é obtida em função das equações (75) e (78), Silva [7]:

$$K_{ij}^{AL} = R_{ij} - \frac{R_{im} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_m} \right\}_1 \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_n} \right\}_1 R_{nj}}{\left\{ \frac{\partial f}{\partial F_m} \right\}_1 R_{mn} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_n} \right\}_1}$$

4.4.2. Algoritmo de retorno com 2 vetores

Para a situação em que existam 2 rótulas plásticas, assume-se que $f_1(F_i) = 0$ e $f_2(F_i) = 0$, e a correção para trazer os esforços seccionais de ambos nós para a superfície de interação, ao final do processo iterativo, é apresentada a seguir:

$$F_i = F_i^{trial} - \lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 - \lambda_2 K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_2, \text{ com } \lambda_1 > 0 \text{ e } \lambda_2 > 0 \quad (79)$$

Utilizando o vetor de forças nodais de partida, $F_i^{trial} = \bar{F}_i + K_{ij} dU_j$, na equação anterior e aplicando o diferencial total, chega-se a:

$$dF_i = K_{ij} dU_j - d\lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 - \lambda_1 K_{ij} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial F_j \partial F_k} \right]_1 dF_k - d\lambda_2 K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_2 - \lambda_2 K_{ij} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial F_j \partial F_k} \right]_2 dF_k \quad (80)$$

Semelhantemente, as equações (56) e (57) desenvolvem a equação (80) da seguinte forma:

$$\left(\delta_{ik} + \lambda_1 K_{ij} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial F_j \partial F_k} \right]_1 + \lambda_2 K_{ij} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial F_j \partial F_k} \right]_2 \right) dF_k = K_{ij} dU_j - d\lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 - d\lambda_2 K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_2 \quad (81)$$

Usando a matriz Q_{ik} (ver equação (57)) e definindo a matriz de redução plástica como $R_{ij} = Q_{il}^{-1} K_{lj}$, apresenta-se a equação (81) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} Q_{il} dF_i &= K_{ij} dU_j - d\lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 - d\lambda_2 K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_2 \\ \Rightarrow dF_i &= Q_{il}^{-1} (K_{ij} dU_j - d\lambda_1 K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 - d\lambda_2 K_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_2) \\ \Rightarrow dF_i &= R_{ij} \left(dU_j - d\lambda_1 \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 - d\lambda_2 \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_2 \right) \end{aligned} \quad (82)$$

Como o vetor de forças nodais final F_i cumpre as condições $f_1(F_i) = 0$ e $f_2(F_i) = 0$, diferenciam-se estas condições com base na equação (82), (Silva [7]). Com isso, chega-se a:

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_m dF_i &= 0 \\ \Rightarrow \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_m R_{ij} \left(dU_j - d\lambda_1 \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 - d\lambda_2 \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_2 \right) &= 0 \\ \Rightarrow \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_m R_{ij} dU_j &= \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_m R_{ij} d\lambda_1 \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 \\ &+ \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_m R_{ij} d\lambda_2 \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_2 \end{aligned} \quad (83)$$

com $m = 1, 2$.

Reescrevendo as equações de (83) em função dos multiplicadores plásticos, na forma matricial, obtém-se:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_1 R_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 & \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_1 R_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_2 \\ \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_2 R_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_1 & \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_2 R_{ij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_j} \right\}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\lambda_1 \\ d\lambda_2 \end{Bmatrix} \\ = \begin{Bmatrix} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_1 R_{ij} dU_j \\ \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_2 R_{ij} dU_j \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (84)$$

De forma semelhante ao sistema da equação (63), a solução do sistema é:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\lambda_1 \\ d\lambda_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} \quad (85)$$

$$\mathbf{a}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{b} \quad (86)$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{a}^{-1}\mathbf{b} \quad (87)$$

com

$$\mathbf{a}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} & -\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} & \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{bmatrix} \quad (88)$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{bmatrix} \quad (89)$$

Assim, tem-se que:

$$\begin{aligned} d\lambda_1 &= \frac{a_{22} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_1 R_{ij} dU_j - a_{12} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_2 R_{ij} dU_j}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ d\lambda_2 &= \frac{a_{11} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_2 R_{ij} dU_j - a_{21} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_1 R_{ij} dU_j}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{aligned} \quad (90)$$

Convém comentar que, se qualquer multiplicador plástico assume valores negativos, ou seja, $d\lambda_1 < 0$ ou $d\lambda_2 < 0$, atribui-se valor zero e desativa-se a rótula plástica correspondente ao multiplicador plástico negativo.

Reescrevendo a equação anterior, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 d\lambda_1 &= \left(\frac{a_{22} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_1 R_{ij}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} - \frac{a_{12} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_2 R_{ij}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \right) dU_j \\
 d\lambda_2 &= \left(\frac{a_{11} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_2 R_{ij}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} - \frac{a_{21} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_1 R_{ij}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \right) dU_j \\
 &\Rightarrow d\lambda_1 = \left(c_1 \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_1 R_{ij} - c_2 \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_2 R_{ij} \right) dU_j \\
 &\Rightarrow d\lambda_2 = \left(c_3 \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_2 R_{ij} - c_4 \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_i} \right\}_1 R_{ij} \right) dU_j \\
 d\lambda_1 &= \left(c_1 \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_m} \right\}_1 R_{mn} - c_2 \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_m} \right\}_2 R_{mn} \right) dU_n \\
 &\Rightarrow d\lambda_2 = \left(c_3 \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_m} \right\}_2 R_{mn} - c_4 \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_m} \right\}_1 R_{mn} \right) dU_n
 \end{aligned} \tag{91}$$

Com base nas equações (82) e (91), obtém-se a matriz de rigidez elastoplástica consistente K_{ij}^{AL} (Silva [7]):

$$\begin{aligned}
 K_{ij}^{AL} &= R_{ij} - \left(c_1 R_{im} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_m} \right\}_1 \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_n} \right\}_1 R_{nj} - c_2 R_{im} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_m} \right\}_1 \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_n} \right\}_2 R_{nj} \right) \\
 &\quad - \left(c_3 R_{im} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_m} \right\}_2 \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_n} \right\}_2 R_{nj} - c_4 R_{im} \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_m} \right\}_2 \left\{ \frac{\partial f}{\partial F_n} \right\}_1 R_{nj} \right)
 \end{aligned} \tag{92}$$

5. Exemplos numéricos

5.1. Introdução

Os exemplos 5.1 e 5.2 são aplicações para análise de resultados utilizando algumas superfícies obtidas pelo método proposto neste trabalho.

5.2. Exemplo 5.1

Neste exemplo, são apresentadas aplicações baseadas na teoria de análise elastoplástica utilizando o conceito de rótula plástica e método Backward Euler como em Silva [7]. Utilizam-se algumas funções obtidas pelo modelo apresentado para comparações com o exemplo «Two bay asymmetric frame» de Argyris [10]. A figura 8 mostra a geometria de exemplo e a tabela 4 apresenta as suas propriedades.

Para cada função, são observados: 1) O processo de formação das rótulas plásticas; e 2) Como são atingidas as superfícies de interação

Tabela 4

Propriedades do material (Two bay asymmetric frame).

Propriedades do material (Two bay asymmetric frame)		
Elemento nº	Secção transversal	Dados gerais
1, 2, 3, 6	a-a $A = 800,00\text{cm}^2$ $I_y = 106667,00\text{cm}^4$ $F_{xp} = 290,299 \times 10^6\text{kgf}$ $M_{yp} = 290,299 \times 10^7\text{kgf/cm}$	$E = 907,184 \times 10^5\text{kgf/cm}$ $\sigma_0 = 45,360 \times 10^4\text{kgf/cm}$ $L = 600\text{cm}$
4, 5	b-b $A = 1391,50\text{cm}^2$ $I_y = 245368,00\text{cm}^4$ $F_{xp} = 504,848 \times 10^6\text{kgf}$ $M_{yp} = 580,598 \times 10^7\text{kgf/cm}$	

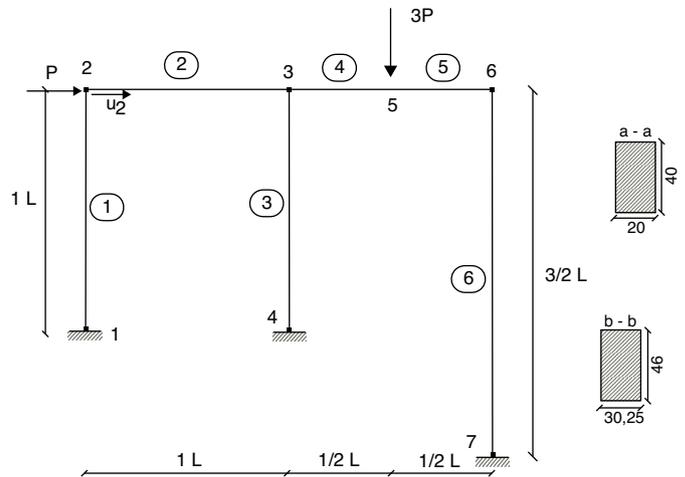


Figura 8. Geometria e dados da secção transversal (Two bay asymmetric frame) [10].

em função dos deslocamentos, rótulas plásticas e multiplicadores plásticos (λ). A notação dos gráficos tem o seguinte significado: elemento = e_i com $i = 1, n$ e nó = n_j com $j = 1, m$. Foram usadas as seguintes funções para as análises elastoplásticas:

- Função n^2m : $f_u = 1,007n^2 + 1,025m - 1 = 0$ (equação (23));
- Função nm^2 : $f_u = 1,063n + 0,907m^2 - 1 = 0$ (equação (24));
- Função n^2m^2 : $f_u = 1,164n^2 + 1,127m^2 - 1 = 0$ (equação (25));
- Função n^2nmm^2 : $f_u = 1,035n^2 + 0,880nm + 0,812m^2 - 1 = 0$ (equação (26)).

São apresentados, na tabela (5), os respetivos das respectivas funções quanto à formação das rótulas plásticas e cargas limite atingidas.

Os resultados obtidos (ver figs. 9 e 10 e tabela 5) pelas funções apresentadas são semelhantes à solução dada por Argyris [10]. Os processos de formação das rótulas plásticas foram parecidos para as funções das equações 24 e 26. Todas as funções possuem semelhanças, sendo que as de resultados mais próximos entre si foram as equações (23) e (25); (24) e (26). Cabe lembrar que a melhor solução do ponto de vista estatístico foi a equação (23) (mais detalhes em Vieira [2]).

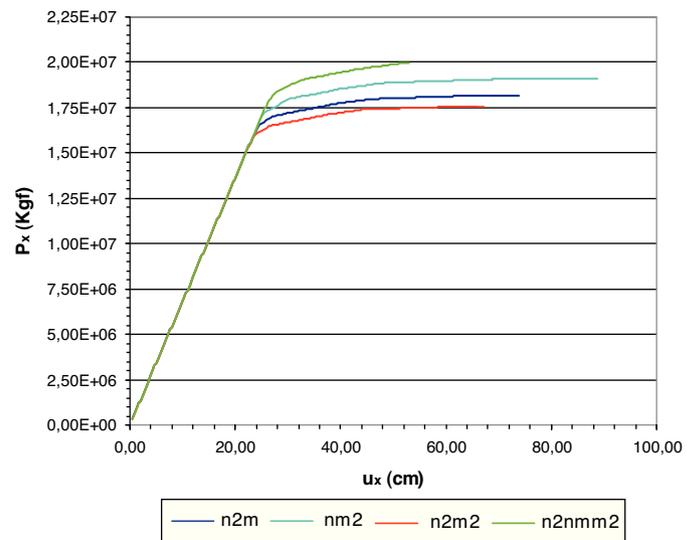


Figura 9. Gráfico carga x deslocamento para o nó 2 - função n2m (Two bay asymmetric frame) - unidade: kgf.

Tabela 5
Rótulas plásticas para as funções analisadas - Two bay asymmetric frame

n ² m (23)			nm ² (24)			n ² m ² (25)			n ² nm ² (26)		
e	nó	λ	e	nó	λ	e	nó	λ	e	nó	λ
<i>Rótulas plásticas</i>											
1	1	2,987E+08	1	1	1,610E+06	1	1	1,589E+08	1	1	1,631E+08
2	3	7,243E+08	2	2	5,422E+08	1	2	1,369E+07	2	2	4,007E+05
4	5	3,922E+09	2	3	3,790E+08	2	2	1,364E+06	2	3	3,815E+08
5	5	8,430E+06	3	4	3,350E+06	2	3	3,762E+08	3	4	4,962E+06
6	6	9,999E+08	4	5	2,033E+09	4	5	1,995E+09	4	5	2,124E+09
			5	5	2,885E+06	5	5	7,750E+05	5	5	6,813E+05
			6	6	5,556E+11	6	6	5,247E+08	6	6	5,445E+08
<i>Carga limite</i>											
	1,81733E+07 kgf			1,90760E+07 kgf			1,75814E+07 kgf			2,01494E+07 kgf	
	43894,70 kp			44986,50 kp			41469,80 kp			47515,80 kp	

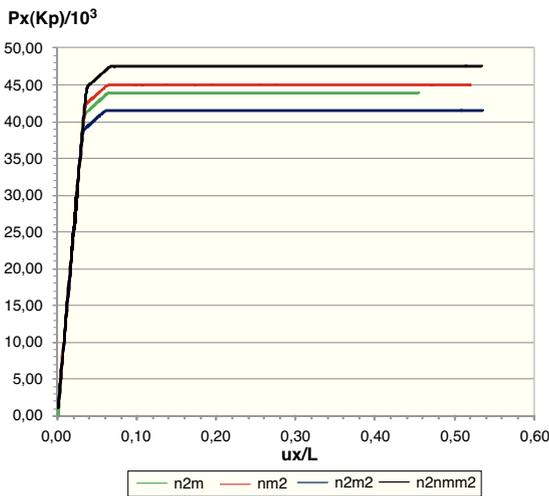


Figura 10. Gráfico carga × deslocamento para o nó 2 - função n2m (Two bay asymmetric frame) - unidade: kp.

5.3. Exemplo 5.2

Neste exemplo, são utilizadas funções de interação semelhantes ao exemplo de Argyris: « Two beam structure », Argyris [10]. As propriedades do exemplo são apresentadas na tabela 6 e a figura 11 mostra a sua geometria e o nó monitorado n^o 2.

Para cada função, são observados: 1) O processo de formação das rótulas plásticas; e 2) Como são atingidas as superfícies de interação em função dos deslocamentos, rótulas plásticas e multiplicadores plásticos (λ). A notação dos gráficos tem o seguinte significado: elemento = e_i com i = 1, n e nó = n_j com j = 1, m.

Foram usadas as seguintes funções para as análises elastoplásticas:

- **Função n²m** : f_u = 1, 007n² + 1, 025m - 1 = 0 (equação (23));

Tabela 7
Rótulas plásticas para as funções analisadas - Two beam structure

n ² m (23)			nm ² (24)			n ² m ² (25)			n ² nm ² (26)		
e	nó	λ	e	nó	λ	e	nó	λ	e	nó	λ
<i>Rótulas plásticas</i>											
1	1	3,495E04	1	1	6,693E+04	1	1	3,818E+04	1	1	3,401E+04
2	4	1,519	3	3	1,013E+05	3	3	7,141E+04	2	4	1,505
3	4	0,769							3	4	0,796
3	3	2,526E04							3	3	2,710E+04
<i>Carga limite</i>											
	1,95225E+05 kgf			2,09059E+05 kgf			1,88502E+05 kgf			2,20945E+05 kgf	
	10073,50 kp			9615,61 kp			9496,01 kp			9954,66 kp	

Tabela 6
Propriedades do material - Two beam structure

Propriedades do material (Two beam structure)		
Elemento n.º	Secção transversal	Dados gerais
1		E = 317, 515 × 10 ⁶ kgf/cm ² σ ₀ = 125, 282 × 10 ⁴ kgf/cm ² F _{xp} = 587, 992 × 10 ⁴ kgf M _{yp} = 280, 774 × 10 ⁴ kgf / cm
2, 3	a - a A = 4, 85cm ² I _y = 1, 475cm ⁴	E = 317, 515 × 10 ⁶ kgf/cm ² σ ₀ = 153, 087 × 10 ⁴ kgf/cm ² F _{xp} = 742, 667 × 10 ⁴ kgf M _{yp} = 354, 616 × 10 ⁴ kgf / cm

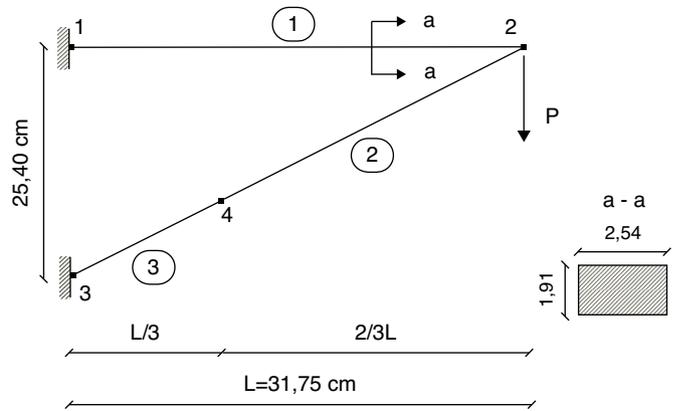


Figura 11. Geometria e dados da secção transversal do « Two beam structure » [10].

- **Função nm²** : f_u = 1, 063n + 0, 907m² - 1 = 0 (equação (24));
- **Função n²m²** : f_u = 1, 164n² + 1, 127m² - 1 = 0 (equação (25));
- **Função n²nm²** : f_u = 1, 035n² + 0, 880nm + 0, 812m² - 1 = 0 (equação (26)).

São apresentados, na tabela (7), os resultados das respetivas funções quanto à formação das rótulas plásticas e cargas limite atin-

Tabela 8

Resultados obtidos por Argyris - Two beam Structure

Curvas de Argyris		
Identificação	Curva	Carga crítica (kp)
BESCOP, 30 elementos	0-1	9250,00
BESCOEP, 2 elementos	0-2	10100,00
BESCOEP, 6 elementos	0-3	9100,00
BESCOEP, 30 elementos	0-4-5	9000,00

gidas. Os resultados obtidos por Argyris [10] estão apresentados na tabela (8).

Os resultados obtidos pelas funções apresentadas são semelhantes às soluções das cargas críticas dadas por Argyris [10]. O processo de formação das rótulas plásticas foram parecidos para os pares de funções das equações {(24), (25)} e {(23), (26)}. O comportamento das funções (ver figs. 12 e 13) foram semelhantes, sendo que a função de melhor resultado elastoplástico comparada com Argyris foi a superfície da equação (23). Esta, também, foi a melhor solução do ponto de vista estatístico.

6. Conclusões

- As superfícies de escoamento em resultantes de tensões facilitam o processo de análise sem a necessidade da integração numérica, de maneira que o modelo baseado nas formulações de viga de Timoshenko 3D e a regressão linear múltipla permitiu a geração destas superfícies por processo numérico;
- As aplicações demonstram que a formulação apresentada consegue gerar boas funções de escoamento que retratam os fenômenos físicos;
- A formulação permite tratar por processo numérico dados obtidos por análises numéricas e/ou experimentais;

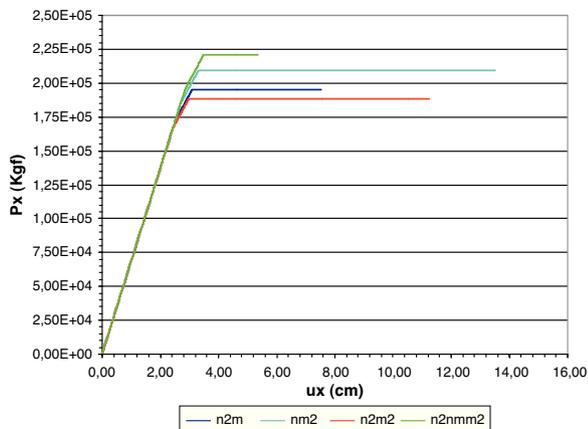


Figura 12. Gráfico carga × deslocamento para o nó 2 - (Two beam structure)- unidade: kgf.

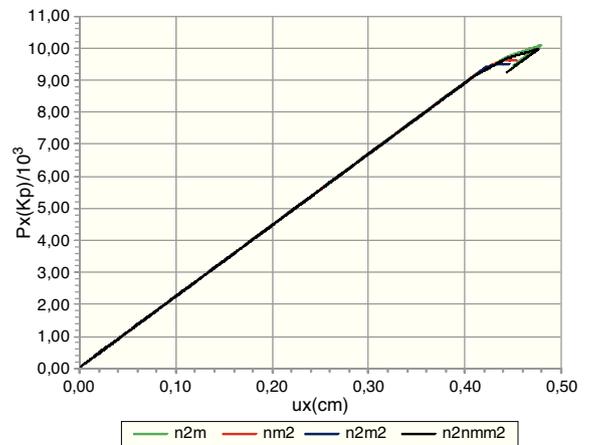


Figura 13. Gráfico carga × deslocamento para o nó 2 - (Two beam structure)- unidade: kp.

- As pesquisas futuras terão o intuito de gerar funções de escoamento para outros tipos de seções transversais com outros materiais;
- Pretende-se também desenvolver um método que obtenha os melhores índices α para as funções de escoamento propostas.

Agradecimentos

Aos professores do PECC/UnB/Brasil, CIMNE/UPC/Espanha e à CAPES pelo fomento.

Bibliografia

- [1] A.D. Hanganu, Metodología de Evaluación del Deterioro en Estructuras de Hormigón Armado, Monografía CIMNE nº 39, Barcelona, Espanha, 1997.
- [2] P.C. dos S. Vieira, Geração de Superfícies de Interação pelo Método da Regressão Linear Múltipla com o Modelo de Dano em Vigas de Timoshenko 3D, Publicação no E.TD- 006A/04, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 150p, 2004.
- [3] S. Oller, Fractura Mecânica. Un enfoque global, CIMNE, Barcelona, Espanha, 2001.
- [4] D.C. Montgomery, G.C. Runger, Probabilidad y Estadística Aplicadas a la Ingeniería, McGraw-Hill Interamericana Editores, S. A., D. F. México, 1998.
- [5] M.R. Horne, Plastic theory of structures, 2d ed, Pergamon Press, Oxford, Inglaterra, 1972.
- [6] B.G. Neal, The plastic methods of structural analysis, Chapman and Hall, Inglaterra, 1977.
- [7] W.T.M. Silva, Análise Elastoplástica de Pórticos Espaciais Utilizando o Conceito de Rótula Plástica e o Método de Backward Euler, Métodos Computacionais em Engenharia, Lisboa, Portugal, 2004.
- [8] J. Lubliner, Plasticity Theory, Macmillan Publishing Company, New York, USA, 1990.
- [9] M.A. Crisfield, A Consistent Co-rotational Formulation for Non-linear, Three-dimensional, Beam-elements, Comp. Methods Appl. Mech. Engrg. 81 (1990) 131–150.
- [10] J. Argyris, Finite Element Analysis of Two and Three-Dimensional Elasto-Plastic Frames-The Natural Approach, Comp, Methods Appl. Mech. Engrg. 35 (1982) 221–248.