



Special Issue on Polymers and Composites

Metodologia alternativa para a determinação do módulo de elasticidade em vigas estruturais de madeira de *Pinus caribaea*

Alternative methodology to determine the modulus of elasticity in timber beams of Pinus caribaea wood specie

A. L. Christoforo^{a,*}, T. H. Panzera^a, J. Fiorelli^b, A. L. Zangiácomo^c, F. A. R. Lahr^d

^a Universidade Federal de São João del-Rei (UFSJ), Dept. de Engenharia Mecânica (DEMEC), 36.307-352, São João del-Rei - MG, Brasil

^b Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos (FZEA), Departamento de Engenharia de Biossistemas, 13635-900, Pirassununga - SP, Brasil

^c Universidade Federal de Lavras (UFLA), Dept. de Engenharia (DEG), 37.200-000, Lavras - MG, Brasil

^d Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo (EESC/USP), Dept. de Engenharia de Estruturas (SET), 13.566-590, São Carlos - SP, Brasil

Resumo

Este trabalho propõe uma metodologia alternativa de cálculo fundamentada no Método dos Mínimos Quadrados para a obtenção do módulo de elasticidade na flexão em vigas de madeira de dimensões estruturais. As equações desenvolvidas requerem o conhecimento de três pontos medidos em deslocamentos ao longo da peça, permitindo maior confiabilidade sobre a variável resposta, utilizando-se do ensaio de flexão estática a quatro pontos. A metodologia aqui proposta foi empregada em conjunto com uma simplificada, requerendo a medição de um único valor em deslocamento (ponto médio da viga), objetivando-se comparar os resultados entre ambas, sendo utilizada a madeira de *Pinus caribaea*. Os resultados apontaram equivalência estatística entre os modelos empregados, indicando a boa aproximação do modelo simplificado para o cálculo do módulo de elasticidade na flexão para as vigas avaliadas.

© 2013 Sociedade Portuguesa de Materiais (SPM). Publicado por Elsevier España, S.L. Todos os direitos reservados.

Palavras chave: madeira serrada; módulo de elasticidade; método dos mínimos quadrados.

Abstract

This paper proposes an alternative method of calculation based on the Least Squares Method to determine the bending modulus of elasticity in timber beams. The new equations demand the use of three points of displacements which were measured along the element by the four-point static bending test, providing a superior reliability on the response. The results were compared with the simplified methodology in order to verify whether there is data equivalence. The experimental tests were conducted by the use of *Pinus caribaea* wood revealing a statistical equivalence between the methods. The simplified methodology was able to determine the bending modulus with good approximation.

© 2013 Sociedade Portuguesa de Materiais (SPM). Published by Elsevier España, S. L. All rights reserved.

Keywords: sawn wood; modulus of elasticity; least squares method.

* Corresponding author.

E-mail address: alchristoforo@gmail.com (A. L. Christoforo)

1. Introdução

Dentre os principais materiais utilizados na confecção de estruturas destaca-se a madeira, por ser um material de fonte renovável e de excelente relação resistência/densidade, chegando a ser quatro vezes superior a do aço [1].

O projeto de estruturas de madeira, assim como o de outros materiais, requer o conhecimento de algumas variáveis, dentre elas, o módulo de elasticidade, obtido por intermédio de ensaios experimentais preconizados por documentos normativos, podendo ser destrutivos ou não.

Por ser a madeira um material ortotrópico e heterogêneo, visando maior confiabilidade, a sua caracterização na flexão requer experimentações em peças com dimensões estruturais. Neste âmbito, apenas documentos normativos internacionais podem ser citados, uma vez que a norma Brasileira ABNT NBR 7190 [2], que trata da caracterização da madeira, contempla apenas a condição de ensaio destrutivo em corpos de prova de pequenas dimensões e isentos de defeitos. A norma ASTM D 198 [3] preconiza o ensaio de flexão estática a quatro pontos (Figura 1) na determinação do módulo de elasticidade na flexão (E_M), expresso pela Equação 1, sendo F a força aplicada no limite de proporcionalidade, L o vão livre entre apoios, a é distância entre as forças aplicadas, b a largura do corpo de prova, h a espessura do corpo de prova e δ o deslocamento vertical observado no meio do vão.

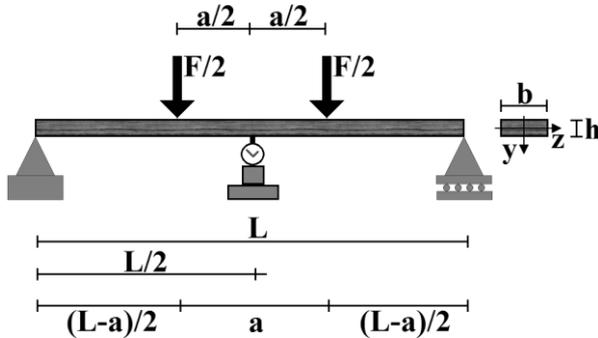


Fig. 1. Flexão estática a quatro pontos [3].

$$E_M = \frac{F \cdot a \cdot (3 \cdot L^2 - 4 \cdot a^2)}{4 \cdot b \cdot h^3 \cdot \delta} \quad (1)$$

A norma ASTM D3043 [4] emprega o modelo estrutural de flexão estática a quatro pontos na determinação das propriedades de resistência e rigidez

em chapas de madeira, indicando para tanto a posição de menor inércia da peça (flatwise), assim como ilustra a Figura 2.

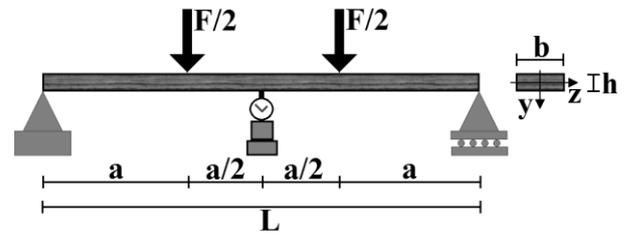


Fig. 2. Flexão estática a quatro pontos [4].

O módulo de elasticidade calculado pela norma ASTM D3043 [4], intitulado aparente (E_a), é obtido pela Equação 2.

$$E_a = \frac{a \cdot (3 \cdot L^2 - 4 \cdot a^2)}{2 \cdot b \cdot h^3} \cdot \left(\frac{F_{50\%} - F_{10\%}}{\delta_{50\%} - \delta_{10\%}} \right) \quad (2)$$

Da equação 2, $F_{50\%}$ e $F_{10\%}$ são as forças correspondentes a 10% e 50% da máxima aplicada ao corpo de prova, $\delta_{50\%}$ e $\delta_{10\%}$ são os deslocamentos (mm) correspondentes a 10% e 50% da força máxima, b e h correspondem respectivamente à largura e à altura (mm) da seção transversal do corpo de prova, a é a distância entre o apoio e o ponto de aplicação da força e L o vão entre apoios.

A norma ASTM D4761 [5] utiliza o ensaio de flexão estática a três pontos na obtenção do módulo de elasticidade aparente (Equação 3) em chapas na posição vertical (Figura 3), sendo I_z o momento de inércia em relação ao eixo “z”.

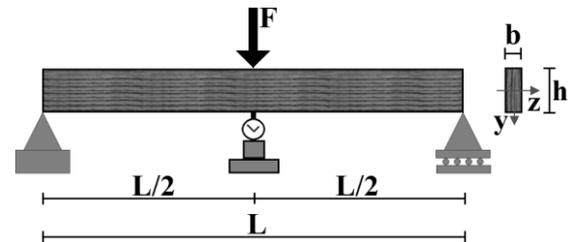


Fig. 3. Flexão estática a três pontos [6].

$$E_a = \frac{L^3}{48 \cdot I_z} \cdot \left(\frac{F_{50\%} - F_{10\%}}{\delta_{50\%} - \delta_{10\%}} \right) \quad (3)$$

Os dois métodos de cálculo proposto pelas normas ASTM D3043 [4] e ASTM D4761 [5] podem fornecer valores diferentes para o módulo de elasticidade, justificados pela intensidade e amplitude dos esforços

cortantes, conduzindo a valores aparentes para os módulos de elasticidade na flexão, uma vez que o modelo de vigas utilizado no desenvolvimento das equações não contempla a parcela dos esforços cortantes [6].

Entretanto, Bodig e Jayne [7] afirmam que quão maior for a relação comprimento da viga (L) pela altura da seção transversal (h), menor é a contribuição do esforço cortante no cálculo dos deslocamentos. Para relações L/h iguais ou superiores a 21 esta contribuição é praticamente desprezável [8].

A norma ASTM D4761 [6], que adota o ensaio de flexão a três pontos, preconiza que a relação L/h para o ensaio de chapas na posição vertical deve estar situada entre 17 e 21. Nestes casos, o módulo de elasticidade aparente (E_a) se aproxima do módulo de elasticidade na flexão (E_M).

A norma EN 789 [9] preconiza o ensaio de flexão a quatro pontos segundo o método da curvatura, registrando o deslocamento vertical no meio do vão, porém, relativo a outro ponto situado entre os de atuação do carregamento, sendo preferível um mais afastado possível do meio do vão. A interpretação dos resultados é feita a partir do registro da variação da curvatura em função das forças aplicadas. Neste caso, obtém-se o módulo de elasticidade à flexão baseado exclusivamente na deformação por momento fletor. A equação 4 expressa o módulo de elasticidade na flexão.

$$E_M = \left(\frac{F_{40\%} - F_{10\%}}{\delta_{40\%} - \delta_{10\%}} \right) \cdot \frac{L_1^2 \cdot L_2}{16 \cdot I_z} \quad (4)$$

Da equação 4, $F_{40\%}$ e $F_{10\%}$ são as forças (kgf) correspondentes a 10% e 40% da força máxima aplicada ao corpo de prova, $\delta_{40\%}$ e $\delta_{10\%}$ são os deslocamentos (cm) correspondentes a 10% e 40% da força máxima, L_1 a distância de referência para medição do deslocamento no vão central (cm) e L_2 a metade do comprimento da zona de cisalhamento (cm). Os compósitos estruturais de madeira, tais como os painéis colados a partir de lâminas (Laminated Veneer Lumber - LVL) e os painéis de partículas laminadas (Laminated Strand Lumber - LSL, Oriented Strand Lumber - OSL e Parallel Strand Lumber - PSL) são geralmente caracterizados à flexão pelas premissas de cálculo da norma ASTM D5456 [10], que emprega o ensaio de flexão estática a três pontos na determinação do módulo de elasticidade e resistência a flexão das lâminas, devendo ser avaliados para as duas possíveis posições, a de menor e maior momento de inércia, de acordo com a composição da lâmina na formação da peça [11,12].

No Brasil, as pesquisas que envolvem a caracterização de peças de madeira por intermédio de ensaios destrutivos seguem as premissas de métodos e cálculos contidos em documentos normativos internacionais, podendo-se citar os trabalhos de Pigozzo et al. [13], Fiorelli [14], Miotto e Dias [15] entre outros.

Como comentado anteriormente, a caracterização de peças de madeira de dimensões estruturais pode também ser realizada por intermédio de ensaios não destrutivos, que visam à determinação das propriedades físicas e mecânicas de um elemento estrutural sem a alteração das suas capacidades de uso [16]. A vantagem do emprego de ensaios não destrutivos consiste na não necessidade da extração de corpos de prova, viabilizando o estudo da integridade estrutural [17, 18], comumente realizados por meio de ensaios como vibração transversal e ultrassom.

Do exposto, os modelos de cálculo propostos por documentos normativos para a determinação do módulo de elasticidade na flexão em peças de madeira de dimensões estruturais (via ensaios destrutivos) não contemplam o uso dos critérios baseados em otimização, sendo o módulo de elasticidade obtido diretamente da equação da elástica de vigas da resistência dos materiais.

Com relação aos ensaios não destrutivos, ressalta-se a necessidade da aquisição de equipamentos especializados para a determinação do módulo de elasticidade.

Este trabalho propõe uma metodologia analítica de cálculo, fundamentada no Método dos Mínimos Quadrados e no ensaio de flexão estática a quatro pontos, de forma não destrutiva, para a determinação do módulo de elasticidade na flexão em peças de madeira serrada de dimensões estruturais. O emprego da abordagem analítica é feito para madeiras da espécie de *Pinus caribaea*, sendo os resultados dos módulos de elasticidade obtidos comparados com os advindos da resistência dos materiais (modelo simplificado), permitindo-se verificar as diferenças entre ambos.

2. Material e métodos

Para a determinação do módulo de elasticidade foram utilizadas 24 peças de madeira da espécie *Pinus caribaea*, de dimensões 5 cm x 9 cm x 160 cm, respeitando-se a relação $L \geq 21h$ [9], desprezando-se os efeitos do cisalhamento no cálculo das deslocamentos das peças.

O ensaio experimental utilizado na determinação do módulo de elasticidade é considerado não destrutivo, em virtude do maior valor em deslocamento encontrado estar limitado à relação $L/200$, sendo L o vão livre entre apoios. Esta é uma medida de pequenos deslocamentos definida pela NBR 7190 [2], implicando em linearidade física e geométrica para as vigas de madeira.

Os esquemas de ensaio utilizados na determinação do módulo de elasticidade na flexão por ambas as metodologias de cálculo, com um (simplificada) e com três relógios comparadores são ilustrados nas Figuras 4A e 4B respectivamente.

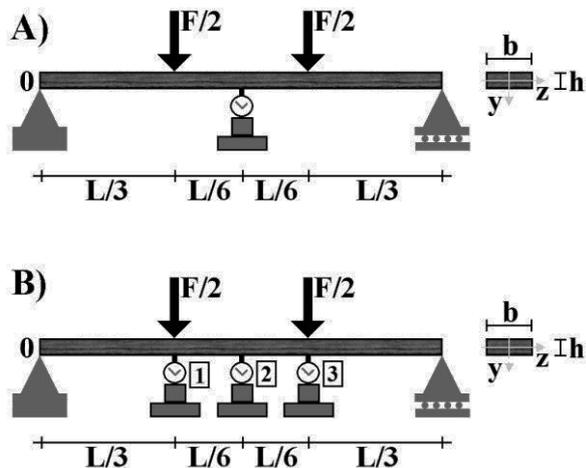


Fig. 4. Flexão estática a quatro pontos: (A) um relógio comparador, (B) três relógios comparadores.

O emprego da metodologia aqui proposta requer o conhecimento do valor dos deslocamentos analíticos da peça nas posições dos três relógios comparadores (R1, R2, R3). Estes por sua vez foram obtidos do emprego do Método das Forças Virtuais (MFV) ao esquema estrutural ilustrado na Figura 4B, expressos pelas equações 5 e 6.

$$V_1 = V_3 = \frac{5 \cdot F \cdot L^3}{324 \cdot E \cdot I_z} \tag{5}$$

$$V_2 = \frac{23 \cdot F \cdot L^3}{1296 \cdot E \cdot I_z} \tag{6}$$

Pela simetria existente no modelo de ensaio, os deslocamentos verticais (V_i) nos relógios 1 e 3 (V_1 e V_3) são iguais. Ressalta-se que o valor do deslocamento obtido na equação 6 é equivalente ao do deslocamento fornecido pelo modelo matemático de cálculo

proposto pela norma ASTM D3043 [5] (equação 2), diferenciando-se apenas na questão desse último ser destrutivo.

O módulo de elasticidade a ser calculado com as informações advindas do modelo de ensaio da Figura 4 parte da ideia de mínimos quadrados (equação 7), objetivando-se determinar o valor do módulo de elasticidade para que o resíduo gerado entre os valores dos deslocamentos analítico (V) e experimental (δ) seja o menor possível.

$$f(E) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n (V_i - \delta_i)^2 \tag{7}$$

Por ser quadrática, a igualdade da derivada primeira da equação 7 a zero conduz ao valor do módulo de elasticidade que minimiza o resíduo entre os valores dos deslocamentos (equação 8), comprovando-se pelo critério da derivada segunda que este é um ponto de mínimo e global.

$$E_{M,o} = \frac{443 \cdot F \cdot L^3}{36 \cdot (20 \cdot \gamma + 23 \cdot \delta_2) \cdot b \cdot h^3}, \quad \gamma = \delta_1 + \delta_3 \tag{8}$$

A equação 8 ($E_{M,o}$) aqui apresentada juntamente com a equação 6 (E) são empregadas no cálculo dos módulos de elasticidade. Para tanto, foi utilizado o intervalo de confiança da diferença entre médias, expresso pela equação 9, sendo μ a média populacional das diferenças, \bar{x}_m a média aritmética amostral das diferenças, n o tamanho da amostra, S_m o desvio padrão amostral das diferenças e $t_{\alpha/2, n-1}$ o valor tabelado pela distribuição t de Student com n-1 graus de liberdade e nível de significância α .

$$\bar{x}_m - t_{\alpha/2, n-1} \cdot S_m / \sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{x}_m + t_{\alpha/2, n-1} \cdot S_m / \sqrt{n} \tag{9}$$

3. Resultados

Os valores dos módulos de elasticidade e $E_{M,o}$ e E obtidos para as madeiras de *Pinus caribaea* são apresentados na Tabela 1.

O intervalo de confiança entre os valores do $E_{M,o}$ e E encontrado é $-558.98 \leq \mu \leq 519.90$, e como o zero pertence ao intervalo, afirma-se que estes são estatisticamente equivalentes.

Tabela 1. Valores dos módulos de elasticidade $E_{M,0}$ e E para o *Pinus caribaea*.

Peça	E (MPa)	$E_{M,0}$ (MPa)	Peça	E (MPa)	$E_{M,0}$ (MPa)
1	7421	7537	13	7890	8101
2	8437	8638	14	6512	5786
3	8315	8627	15	5876	6129
4	8512	8390	16	7535	7364
5	7857	8134	17	7649	7471
6	6501	6347	18	8424	8763
7	5878	6042	19	6321	6274
8	7963	8153	20	8368	8570
9	8990	9202	21	8527	8217
10	7575	7362	22	7411	7634
11	8345	8216	23	8520	8397
12	7329	7494	24	7173	6950

4. Conclusões

A metodologia analítica de cálculo aqui proposta permite determinar o módulo de elasticidade em peças de dimensões estruturais com maior confiabilidade quando comparada a outras metodologias, por estar fundamentada em mínimos quadrados.

Pela equivalência estatística encontrada entre os valores do módulo de elasticidade das madeiras de *Pinus caribaea* por ambas a metodologias de cálculo, constata-se que as peças, mesmo podendo ser dotadas de alguns defeitos ou imperfeições não visíveis, na condição de pequenos deslocamentos (premissa de projeto), pouco afetaram no cálculo do módulo de elasticidade, implicando neste caso, na boa aproximação obtida do modelo de cálculo proposto pela norma ASTM D3043 [5] com a adaptação de se considerar os ensaios como sendo não destrutivos.

Referências

- [1] C. Calil Jr., F.A.R. Lahr, A.A. Dias, Dimensionamento de elementos estruturais de madeira. Editora Manole Ltda, Barueri – SP, ISBN: 85-204-1515-6, 2003, 152 p.
- [2] Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT). Projeto de Estruturas de Madeira. NBR 7190, Rio de Janeiro, 1997.
- [3] American Society for Testing and Materials (ASTM). Standard test method of static tests of lumber in structural sizes. ASTM D 198. Annual book of ASTM standards, v. 03.01. ASTM, West Conshohocken, Philadelphia, 1997.
- [4] American Society for Testing and Materials (ASTM). Standard methods of testing structural panels in flexure. ASTM D 3043-95. Annual book of ASTM standards. ASTM, West Conshohocken, Philadelphia, 1995.
- [5] American Society for Testing and Materials (ASTM). Standard test methods for mechanical properties of lumber and wood-base structural material. ASTM D 4761-96. Annual book of ASTM standards. ASTM, West Conshohocken, Philadelphia, 1996.
- [6] D Guitard, Mécanique du matériau bois et composites. Cepadues-editions. France, 1987.
- [7] J. Bodig, B.A. Jayne, Mechanics of wood and wood composites. Krieger Publishing Company. Malabar, Florida, 1992.
- [8] F.A. Rocco Lahr, Sobre a determinação de propriedades de elasticidade da madeira. 1983, 216p. Tese de Doutorado. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, 1983.
- [9] European Standard (EN). Estruturas de Madeira - Métodos de teste - Determinação das propriedades mecânicas de painéis derivados de madeira. EN 789, European Standard (v. portuguesa), Bruxelas, 1995.
- [10] American Society for Testing and Materials (ASTM). Standard specification for evaluation of structural composites lumber products. ASTM D 5456. Annual book of ASTM standards. ASTM, West Conshohocken, PA, 2006.
- [11] H.A.L. Palma, A.W. Ballarin, R.M. Abilio, Propriedades mecânicas de painéis LVL de Pinus tropicais. In: XI Encontro brasileiro em madeira e estruturas de madeiras, Londrina, 2008.
- [12] H.A.L. Palma, A.W. Ballarin, C.D. Rocha, Propriedades de flexão de vigas LVL de *Eucalyptus grandis*. In: XI Encontro brasileiro em madeira e estruturas de madeiras, Londrina, 2008.
- [13] J.C. Pigozzo, E. Pletz, F.A. Rocco Lahr, Aspectos da classificação mecânica de peças estruturais de madeira. In: VII Encontro Brasileiro em Madeiras e em Estruturas de Madeira. São Carlos, SP, 2000.
- [14] J. Fiorelli, Estudo teórico e experimental de vigas de madeira laminada colada reforçadas com fibra de vidro. São Carlos: USP, 2005. 108p. Tese (Doutorado em Ciência e Engenharia de Materiais) - Universidade de São Paulo, 2005.
- [15] J.L. Miotto, A.A. Dias, Revista Tecnológica, Edição Especial Enteca, p. 35-45 (2009).
- [16] R.J. Ross, B.K. Brashaw, R.F. Pellerin, *Forest Prod. J.* **48**, 14 (1998).
- [17] A.J.S. Miná, F.G.R. Oliveira, C. Calil Jr., A.A. Dias, A. Sales, *Sci. For.* **65**, 188 (2004).
- [18] F.G.R. Oliveira, A. Sales, *Mater. Res.* **5**, 51 (2002).