

## DISEÑO DISIPATIVO DE OBSERVADORES PARA SISTEMAS NO LINEALES DISCONTINUOS O MULTIVALUADOS

M. Osorio\*<sup>1</sup>, J. A. Moreno\*\*

\* *Universidad Pontificia Bolivariana (UPB), Escuela de Ingeniería, Grupo de Investigación en Automática y Diseño. Cir 1 Num. 70-01. Medellín, Colombia.*  
email: marisol.osorio@upb.edu.co

\*\* *Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), Automatización, Instituto de Ingeniería, Edificio 12, Circuito Exterior, 04510 México D.F., México.*  
Tel: +52-55-56233600 ext. 8811,  
email: JMorenoP@iingen.unam.mx

Resumen: En este artículo se describe la aplicación, a sistemas discontinuos o multivaluados, de una metodología de diseño de observadores basada en la disipatividad, por medio del uso de la teoría de inclusiones diferenciales y de una generalización del teorema del círculo. Los sistemas susceptibles de ser tratados por medio de este método son aquellos que pueden ser expresados en la forma de Lur'e, y en los que se permite la inclusión de no linealidades discontinuas o multivaluadas, y en general no Lipschitz. El método presentado elimina restricciones que otros métodos imponen en cuanto a la monotonía y la igualdad de número de entradas y salidas de las no linealidades permitidas.  
*Copyright © 2008 CEAC-IFAC*

Palabras clave: Sistemas no lineales, Observadores no lineales, Disipatividad, Mapeos Discontinuos, Mapeos Multivaluados.

### 1. INTRODUCCIÓN

Muchos sistemas físicos comunes se modelan por medio de mapeos discontinuos o multivaluados. Para citar algunos ejemplos se puede mencionar a los sistemas mecánicos con fricción estática o juego, o a los sistemas electromecánicos con histéresis. Otro caso es el de los sistemas híbridos, que están siendo estudiados con mucho interés en los últimos años (Teel *et al.*, 2006). Es muy común que se utilicen aproximaciones continuas a la hora de analizar sistemas con características discontinuas o multivaluadas, en parte, porque las

herramientas matemáticas tradicionales no garantizan la existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones que incluyen no linealidades de ese tipo. Sin embargo, ahora es posible utilizar para su tratamiento la teoría de inclusiones diferenciales, que ha sido desarrollada en las últimas décadas y que permite darles un tratamiento matemático adecuado a las no linealidades discontinuas o multivaluadas, considerándolas como funciones que pueden tomar valores de conjunto. (Aubin and Cellina, 1984; Filippov, 1988; Baccioti and Rosier, 2001; Yakubovich *et al.*, 2004).

La observación de sistemas discontinuos o multivaluados ha sido poco explorada. Se encuentran

<sup>1</sup> En estancia de estudios doctorales en la UNAM

trabajos en los que se añaden discontinuidades a los observadores para mejorar su desempeño, obteniéndose observadores por modos deslizantes (Haskara *et al.*, 1998; Drakunov and Utkin, 1995; Xiong and Saif, 2001). Su aplicabilidad no se garantiza si la discontinuidad proviene del sistema a observar, pues solamente se consideran allí sistemas lineales o que incluyen no linealidades suaves. Últimamente, estos observadores se aplican también a sistemas con incertidumbres acotadas en el modelo (Davila *et al.*, 2005; Davila *et al.*, 2006). Existen muy pocas publicaciones sobre obtención de observadores para plantas que incluyan de manera explícita no linealidades discontinuas o multivaluadas (Juloski, 2004; Heemels *et al.*, 2005; Juloski *et al.*, 2006). Estos autores se inspiran en los observadores por criterio del círculo propuestos en (Arcak and Kokotovic, 2001). La clase de sistemas que pueden ser tratados por métodos como el de Juloski y el de Arcak está restringida fundamentalmente por dos condiciones:

- i) Las no linealidades involucradas deben ser máximamente monótonas, lo que implica que tienen que ser cuadradas (con el mismo número de entradas y salidas).
- ii) Se exige unicidad a las soluciones del observador diseñado, esto a pesar del hecho de que el sistema sea no lineal discontinuo o multivaluado y por ende, pueda llegar a tener múltiples soluciones.

En (Moreno, 2005; Moreno, 2006) se propuso una Técnica de Diseño Disipativo para observadores destinados a sistemas que contienen no linealidades suaves expresados en la forma de Lur'e. Esa técnica generaliza el método propuesto en (Arcak and Kokotovic, 2001) y elimina la restricción de monotonía **i**) que éste impone. Además, otras estrategias de diseño de observadores, tales como el diseño de Alta Ganancia (Gauthier *et al.*, 1992; Khalil, 1999) y el observador clásico Lipschitz de Thau (Thau, 1973) pueden unificarse bajo el Diseño Disipativo.

En este nuevo trabajo, el objetivo es extender la metodología a sistemas en la forma de Lur'e o que puedan llevarse a ella mediante transformaciones de estado y/o de salida, y que incluyan no linealidades no suaves, esto es, discontinuas, multivaluadas, y, en general, no Lipschitz. Así mismo, se elimina la exigencia de unicidad de soluciones del observador, de manera que se descarta la restricción **ii**). Los sistemas no Lipschitz no suelen tener soluciones únicas (Deimling, 1992), por lo que es razonable que una teoría que los incluya admita soluciones múltiples.

El procedimiento de diseño resultante incluye regularmente la solución de ecuaciones que pueden expresarse mediante desigualdades matriciales, las cuales, bajo ciertas condiciones, pueden ser consideradas lineales (LMI por sus siglas en inglés)

para las que existen métodos numéricos muy eficientes.

El artículo está organizado de la siguiente forma: En la sección 2, se lleva a cabo la descripción de las nociones básicas necesarias para el entendimiento del método, como son las funciones multivaluadas, el procedimiento de convexificación y las definiciones fundamentales de disipatividad. En la sección 3 se explica la filosofía de la técnica de Diseño Disipativo aplicado a sistemas multivaluados. Luego, en la sección 4, se da un ejemplo del método. Al final, se encuentran las conclusiones obtenidas en el trabajo.

## 2. PRELIMINARES

### 2.1 Inclusiones Diferenciales

Para sistemas dinámicos de la forma

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad (1)$$

no es posible asegurar la existencia y unicidad de las soluciones cuando  $f$  es no localmente Lipschitz, discontinua o multivaluada en  $x$  (Filippov, 1988; Deimling, 1992).

Cuando  $f$  es multivaluada,  $f(x, t)$  es un subconjunto no vacío de  $\mathbb{R}^n$  para cada  $t$  en  $\mathbb{R}^+$  y  $x$  en  $\mathbb{R}^n$  y (1) se convierte en una inclusión diferencial, cuya solución se considerará, para efectos de este artículo, en el sentido de Filippov (Aubin and Cellina, 1984; Filippov, 1988; Deimling, 1992; Yakubovich *et al.*, 2004).

$$\frac{dx}{dt} \in f(x, t) \quad (2)$$

Las funciones multivaluadas aparecen en muchos casos para representar el comportamiento de sistemas físicos. En la Sección 4 hay un ejemplo de este caso: Un sistema de movimiento en el que se considera el efecto de la fricción estática. Cuando la masa está en reposo, la fricción opone una fuerza igual a la aplicada, dentro de cierto rango, y la condición de movimiento no cambia. Esto implica que la fuerza opuesta por la fricción estática no es única, sino que determina un conjunto, en el caso del ejemplo, por el intervalo  $[-Fm, Fm]$ . Funciones de este tipo no son continuas ni localmente Lipschitz, así que la existencia y unicidad de las soluciones no se asegura en el sentido clásico. La existencia (aunque no la unicidad) de soluciones para sistemas como (2) puede ser asegurada cuando  $f(x, t)$  satisface las condiciones, no muy restrictivas, que se estipulan a continuación (Bacciotti and Rosier, 2001; Yakubovich *et al.*, 2004):

*Suposición 1.*  $f(x, t)$  es tal que:

(I)  $f(x, t)$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ , no vacío, compacto y convexo para cada  $t \in \mathbb{R}^+$  y cada

$x \in \mathbb{R}^n$ .

(II)  $f(x, t)$ , como función multivaluada de  $x$ , es semicontinua por arriba para todo  $t$ . Una función  $f(x, t)$  es *semicontinua por arriba en un punto*  $(x_0, t_0)$  si para cualquier  $\epsilon > 0$  existe  $\delta(\epsilon, x_0, t_0)$  tal que el conjunto  $f(x_1, t_1)$  está contenido en la  $\epsilon$ -vecindad del conjunto  $f(x_0, t_0)$ , dado que un punto  $(x_1, t_1)$  pertenece a la  $\delta$ -vecindad del punto  $(x_0, t_0)$ .

(III)  $f(x, t)$  es medible en  $x$  en el sentido de Lebesgue.

(IV)  $f(x, t)$  es localmente acotada.

Conceptualmente hablando, una función multivaluada  $f(x, t)$  es semicontinua por arriba en un punto  $(x_0, t_0)$  si, a medida que  $(x, t)$  tiende a  $(x_0, t_0)$ , el límite del conjunto  $f(x, t)$  está contenido en la cerradura del conjunto  $f(x_0, t_0)$  (Yakubovich *et al.*, 2004). En la Figura 1 se ilustran las propiedades de convexidad y semicontinuidad por arriba de algunas funciones multivaluadas. Todas las funciones mostradas son semicontinuas por arriba con excepción de la señalada b). Ésta es, además, no convexa. De entre las funciones semicontinuas por arriba, la c) es no convexa, y a) y d) cumplen las condiciones de semicontinuidad por arriba y convexidad requeridas para la existencia de soluciones de una inclusión diferencial.

Figura 1. Ilustración de propiedades de convexidad y semicontinuidad por arriba

Si  $f$  es discontinua, es posible modificarla de manera que en los puntos de discontinuidad la función sea determinada por medio de un conjunto definido mediante los valores de la función en el punto de la discontinuidad. Este proceso se denomina *convexificación* y no afecta las propiedades globales de la función, pero permite asegurar la existencia de soluciones de ecuaciones (inclusiones) diferenciales que la incluyan (Bacciotti and Rosier, 2001; Filippov, 1988).

Para ilustrar el procedimiento, puede considerarse

la conocida función Signo. Su versión univaluada tradicional se define

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases} \quad (3)$$

Convexificándola, se obtiene una función Signo multivaluada

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ [0, 1] & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad (4)$$

En la Figura 2 se puede observar la diferencia entre las funciones.

Figura 2. Función Signo en versiones univaluada y multivaluada

El proceso de convexificación asegura la semicontinuidad por arriba de la función convexificada, y por ende, la existencia de soluciones.

No sobra anotar que la unicidad de soluciones de una inclusión diferencial está sujeta a condiciones bastante más restrictivas que la existencia, como por ejemplo la máxima monotonicidad de  $f(x, t)$ . En el presente trabajo, a diferencia de en (Juloski *et al.*, 2006), no se exige la unicidad de las soluciones, lo que elimina la necesidad de la monotonicidad.

Es importante establecer adecuadamente el concepto de estabilidad que se usará en lo que sigue: El origen del sistema (2) se considera Uniforme, Global y Asintóticamente Estable (UGAE) cuando cada una de las trayectorias de (2), que, en general, pueden ser múltiples, cumple con la definición clásica de estabilidad uniforme, global y asintótica en el sentido de Lyapunov (estabilidad en sentido fuerte) (Bacciotti and Rosier, 2001):

**Teorema 1. SEGUNDO TEOREMA DE LYAPUNOV:** Sea  $f : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función multivaluada (mapa) de  $x$ , de manera que la existencia (local) de soluciones de (2) esté asegurada. Asíumase que existe una función  $C^1$  de Lyapunov  $V(x, t)$  tal que, para algunas funciones  $a$  y  $b \in \mathcal{K}_{\infty, y}$   $c \in \mathcal{K}$ , y para todo  $t \in [0, +\infty)$ , todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , y todo  $v \in f(x, t)$ , se satisface que:

$$a(\|x\|) \leq V(x, t) \leq b(\|x\|) , \quad (5)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}(x, t) + \langle \nabla_x V(x, t), v \rangle \leq -c(\|x\|) , \quad (6)$$

donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota el producto escalar usual en  $\mathbb{R}^n$ , y  $\nabla_x V = \left( \frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right)^T$ . Bajo estas condiciones

el origen es Uniforme Global y Asintóticamente Estable (UGAE).

## 2.2 Sistemas Disipativos

La metodología de diseño propuesta en el presente trabajo se basa en la teoría de disipatividad (Van der Schaft, 2000; Willems, 1972a; Willems, 1972b; Hill and Moylan, 1980) y en el hecho de que ésta puede aplicarse a los sistemas multivaluados, tal como se verá en esta sección.

*Definición 1.* Un sistema lineal dinámico  $\Sigma_L$  es *Estrictamente Disipativo en los Estados* (EDE) con respecto a una *tasa de alimentación*  $\omega(y, u)$  si existen una *función de almacenamiento* positiva definida  $V(x) = x^T P x$ , y una constante  $\epsilon > 0$ , de tal manera que a lo largo de cualquier trayectoria del sistema se satisface que

$$\frac{dV(x(t))}{dt} \leq \omega(y(t), u(t)) - \epsilon x^T P x. \quad (7)$$

Si la función de tasa de alimentación se define

$$\omega(y, u) = \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}. \quad (8)$$

se dice que  $\Sigma_L$  es  $(Q, S, R)$ -EDE.

En ese caso, la condición (7) se puede escribir en la forma matricial

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P + \epsilon P & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C^T Q C & C^T S \\ S^T C & R \end{bmatrix} \leq 0, \quad (9)$$

con  $P$  simétrica y positiva definida, y  $\epsilon > 0$  (Hill and Moylan, 1980).

Para una clase de operadores estáticos definidos por medio de funciones multivaluadas:

*Definición 2.* Una no linealidad sin memoria, multivaluada, variante en el tiempo  $\psi : [0, \infty) \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,

$$y \in \psi(t, u), \quad (10)$$

tal que  $0 \in \psi(t, 0)$ , es  $(Q, S, R)$ -Disipativa ( $(Q, S, R)$ -D), si para toda  $t \geq 0$ , y  $u \in \mathbb{R}^q$  se cumple la desigualdad de disipatividad:

$$\omega(y, u) = y^T Q y + 2y^T S u + u^T R u \geq 0. \quad (11)$$

*Nota 1.* La *Definición 2* incluye las condiciones clásicas de sector para no linealidades cuadradas, esto es, cuando el número de entradas es igual al de salidas (Khalil, 2002):

$$(y - K_1 u)^T (K_2 u - y) \geq 0 \quad (12)$$

Es de interés, para lo que sigue, considerar la relación entre la disipatividad y la estabilidad en

sistemas interconectados que incluyen no linealidades multivaluadas, para lo que se propone el siguiente Lema.

*Lema 1.* Considere el sistema realimentado en la forma de Lur'e:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, & x(0) &= x_0 \\ y &= Cx, \\ u &\in -\psi(t, y), \end{aligned} \quad (13)$$

y suponga que  $\psi(t, y)$  es una función vectorial multivaluada de dimensión  $q$  que se asume dependiente de  $\sigma$ , semicontinua por arriba, medible en el sentido de Lebesgue y localmente acotada. El conjunto al que pertenece la salida de  $\psi$  es no vacío, compacto y convexo. Si el sistema lineal  $(C, A, B)$  es  $(-R, S^T, -Q)$ -EDE, y  $\psi$  es  $(Q, S, R)$ -D, entonces el punto de equilibrio  $x = 0$  de (13) es Uniforme, Global y Exponencialmente Estable (UGEE).

*Prueba.* De la hipótesis sobre  $\psi(t, y)$  se sigue fácilmente que (13) satisface la Suposición 1 y se puede asegurar la existencia de soluciones. Supóngase que (9) se satisface con  $(-R, S^T, -Q)$ . Sea  $V(x) = x^T P x$  una candidata de Lyapunov para el sistema en lazo cerrado. La derivada con respecto al tiempo de  $V(x)$  a lo largo de las trayectorias solución de (13) es  $\dot{V} = (Ax + Bu)^T P x + x^T P (Ax + Bu)$ , lo que también se puede escribir, con (9) y la última ecuación en (13):

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} PA + A^T P & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \\ &\leq \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -C^T R C & C^T S^T \\ S C & -Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} - \epsilon x^T P x. \end{aligned}$$

Como  $u \in -\psi$  y  $y = Cx$ , lo anterior se puede escribir:

$$\dot{V} \leq - \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} - \epsilon V(x)$$

de lo que se sigue que

$$\dot{V} \leq -\epsilon V(x) \quad (14)$$

dado que  $\psi$  es  $(Q, S, R)$ -D. Del Teorema 1 se concluye que el sistema es UGAE.

Para probar que la estabilidad del sistema es además exponencial, se recuerda que  $V(x)$  es una función positiva definida cuadrática  $x^T P x$  que satisface siempre

$$\lambda_{\min}(P) x^T x \leq V(t, x) \leq \lambda_{\max}(P) x^T x \quad (15)$$

Utilizando el conocido Lema de Comparación (Khalil, 2002) con (14) y (15) se puede concluir que  $\|x\| \leq \left( \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)} \right) \|x(t_0)\| e^{-(\epsilon/2)(t-t_0)}$ , y que por ende, el origen de (13) es UGEE. ■

El Lema 1 es una generalización del teorema del círculo para sistemas multivaluados y establece las condiciones que permiten determinar su estabilidad, con base en condiciones de disipatividad, cuando los sistemas se pueden expresar en la forma de Lur'e. Dado que el sistema incluye no linealidades multivaluadas, es posible que la inclusión diferencial que lo representa tenga múltiples soluciones, en cuyo caso el Lema 1 implica que todas tienden a cero.

### 3. OBSERVADORES DISIPATIVOS PARA SISTEMAS NO LINEALES MULTIVALUADOS

Sea una planta:

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = Ax + G\xi + \varphi(t, y, u), & x(0) = x_0 \\ \xi \in \psi(\sigma), \\ y = Cx, \\ \sigma = Hx, \end{cases} \quad (16)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el estado,  $u \in \mathbb{R}^m$  es una entrada conocida,  $y \in \mathbb{R}^p$  es la salida medida, y  $\sigma \in \mathbb{R}^r$  es una función lineal de los estados, que no tiene que ser medible físicamente.  $\varphi(t, y, u)$  es una función no lineal univaluada de  $(t, y, u)$ , que se asume localmente Lipschitz en  $y$ , continua en  $u$ , y continua a tramos en  $t$ .  $\psi(\sigma)$  es una función vectorial multivaluada de dimensión  $q$  que se asume dependiente de  $\sigma$ . Es semicontinua por arriba, medible en el sentido de Lebesgue y localmente acotada, y el conjunto al que pertenece la salida de  $\psi$  es no vacío, compacto y convexo. Es bueno anotar que  $\psi(\sigma)$  puede ser la versión convexificada de una función discontinua en  $x$ .

Interesa diseñar un *observador* para el sistema (16), esto es, un sistema dinámico  $\Omega$  que tiene como entradas la entrada  $u$  y la salida  $y$  de  $\Sigma$ , y como salida  $\hat{x}$ , que es una estimación del estado  $x$  de  $\Sigma$ , tal que  $\hat{x} \rightarrow x$ . Se propone un observador completo como el propuesto en (Moreno, 2004):

$$\Omega : \begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(\hat{y} - y) + G\zeta + \varphi(t, y, u) \\ \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \\ \zeta \in \psi(\hat{\sigma} + N(\hat{y} - y)) \\ \hat{y} = C\hat{x} \\ \hat{\sigma} = H\hat{x}, \end{cases} \quad (17)$$

donde  $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ , y  $N \in \mathbb{R}^{r \times p}$  son matrices que deben diseñarse. Se define el error en la estimación del estado por medio de  $e \triangleq \hat{x} - x$ , el error en la estimación de salidas  $\tilde{y} \triangleq \hat{y} - y$ , y  $\tilde{\sigma} \triangleq \hat{\sigma} - \sigma$ . La dinámica del sistema que representa el comportamiento del error  $e$  está dada por:

$$\begin{aligned} \dot{e} &= (A + LC)e - G(\xi - \zeta), \\ \xi &\in \psi(\sigma) \\ \zeta &\in \psi(\hat{\sigma} + N(\hat{y} - y)) \\ \tilde{y} &= Ce \\ \tilde{\sigma} &= He, \end{aligned} \quad (18)$$

con  $e(0) = e_0 = \hat{x}_0 - x_0$ . Nótese que  $\hat{\sigma} + N\tilde{y} = H\hat{x} + NCe = Hx + He + NCe = \sigma + (H + NC)e$ . Definiendo  $z \triangleq (H + NC)e = \tilde{\sigma} + N\tilde{y}$ , una función del error de estimación, y una nueva no linealidad, en general multivaluada:

$$\phi(z, \sigma) \triangleq \psi(\sigma) - \psi(\sigma + z), \quad (19)$$

la dinámica del error puede ser escrita como:

$$\Xi : \begin{cases} \dot{e} = A_L e + G\eta \\ e(0) = e_0 \\ z = H_N e \\ \eta \in -\phi(z, \sigma), \end{cases} \quad (20)$$

donde  $A_L \triangleq A + LC$ , y  $H_N \triangleq H + NC$ . Obsérvese que debido a (19),  $0 \in \phi(0, \sigma)$  para todo  $\sigma$ , y por ende,  $e = 0$  es un punto de equilibrio de (20). En general (20) es no autónomo, dado que la planta (16) lo controla a través de la función lineal de los estados  $\sigma$ .  $\phi$  es entonces una no linealidad variable en el tiempo, cuya variación depende del estado de la planta.

Si el origen de  $\Xi$  es UGEE, las trayectorias del observador convergen exponencialmente a las trayectorias de  $\Sigma$ . Esto se cumple a pesar de que en ningún momento se exige la unicidad de soluciones ni para el observador ni para la planta. Cuando en vez de soluciones únicas se consideran soluciones determinadas por los conjuntos que satisfacen la inclusión diferencial (20), la convergencia puede verificarse a través de criterios de convergencia de conjuntos (Dontchev and Lempio, 1992).

Una posibilidad para diseñar el observador es obtener las matrices  $L$  y  $N$  de manera que el sistema que representa la dinámica del error  $\Xi$  (20) satisfaga las condiciones del Lema 1. Para esto, es necesario que la no linealidad satisfaga la condición de disipatividad, esto es:

*Suposición 2.* Existen matrices constantes  $(Q, S, R)$  tales que  $\phi$  (19) satisface la desigualdad  $\omega(\phi, z) = \phi^T Q \phi + 2\phi^T S z + z^T R z \geq 0$ .

Entonces el diseño del observador se puede enunciar así:

*Teorema 2.* Asíumase que las Suposiciones 1 y 2 son ciertas. Si hay matrices  $L$  y  $N$  tales que el subsistema lineal de  $\Xi$  es  $(-R, S^T, -Q)$ -EDE, es decir, existen una matriz  $P = P^T > 0$ , y un  $\epsilon > 0$  tales que

$$\begin{bmatrix} PA_L + A_L^T P + \epsilon P + H_N^T R H_N, \\ G^T P - S H_N, \\ PG - H_N^T S^T \\ Q \end{bmatrix} \leq 0, \quad (21)$$

entonces  $\Omega$  es un observador UGEE de  $\Sigma$ , esto es, existen constantes  $\kappa, \gamma > 0$  tales que para todo  $e(0)$  y todo  $t \geq 0$

$$\|e(t)\| \leq \kappa \|e(0)\| \exp(-\gamma t). \quad (22)$$

*Prueba.* Con (21), la aplicación del Lema 1 lleva inmediatamente a  $\dot{V} \leq -\epsilon V(e)$  y ya que  $V(e) = e^T P e$ . (22) se obtiene con  $\kappa = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}$ , y  $\gamma = \frac{\epsilon}{2}$ . ■

El diseño del observador consiste entonces en la obtención de  $L$  y  $N$ , tales que se satisfaga la desigualdad matricial (21). Para ello, es necesario primero hallar matrices  $Q$ ,  $S$  y  $R$  que satisfagan la desigualdad de disipatividad (11), teniendo cuidado de que la matriz en (8) no sea positiva semidefinida.

Hallar  $L$ ,  $N$ ,  $\epsilon$  y  $P$ , de manera que (21) se satisfaga, es un problema, en general, de solubilidad de una desigualdad matricial no lineal. Se pueden manipular los términos de esta desigualdad, de manera que el problema se convierta en una LMI (*Linear Matrix Inequality*). Por ejemplo, reemplazar  $\epsilon P$  por  $\epsilon I$ , no altera el problema y permite obtener un término lineal en  $\epsilon$ . La desigualdad es cuadrática en  $N$ . Si se fija  $N$ , se obtiene una desigualdad lineal en los términos  $P$ ,  $PL$  y  $\epsilon$ . Obsérvese que si  $R = 0$ , es posible dejar libre  $N$ , obteniéndose (21) lineal en  $P$ ,  $PL$ ,  $\epsilon$  y  $N$ .

El método aquí propuesto generaliza y mejora algunos métodos expuestos previamente en la literatura. Incluye el caso en que las no linealidades son suaves, tal como fue propuesto originalmente en (Moreno, 2004). En ese artículo se puede ver que el método incluye como casos especiales el observador por criterio del círculo propuesto en (Arcak and Kokotovic, 2001), el observador Lipschitz clásico de Thau (Thau, 1973), y el observador de Alta Ganancia (Gauthier *et al.*, 1992; Khalil, 1999). El enfoque disipativo de las no linealidades multivaluadas que se utiliza en este trabajo permite además incluir como un caso especial, y generalizar, el método de diseño de observadores propuesto en (Heemels *et al.*, 2005) y (Juloski *et al.*, 2006; Juloski *et al.*, 2007), para sistemas discontinuos y multivaluados. En esos trabajos, se exige la monotonía de las no linealidades involucradas, las cuales deben tener igual número de entradas y de salidas, y las soluciones de los sistemas deben ser únicas, restricciones que son eliminadas en el presente trabajo. Es de anotar que la inyección no lineal de la salida a través de la matriz  $N$  y la introducción en el diseño de la característica de disipatividad de la no linealidad a través de las matrices  $Q$ ,  $S$  y  $R$ , generan grados adicionales de libertad en el diseño, que pueden ser utilizados para mejorarlo, obteniendo resultados menos conservativos, u optimizando alguna función de costo.

#### 4. EJEMPLO

Para una ilustración muy simple, que permite apreciar algunos aspectos interesantes del método, considérese el sistema de masa en movimiento, con fricción estática y viscosa, esquematizado en la Figura 3. Sus ecuaciones en espacio de estado son:

Figura 3. Sistema de movimiento con fricción estática y viscosa

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{m} (F + \xi), \quad \xi \in \psi(\sigma), \\ y = x_1, \quad \sigma = x_2. \end{cases}$$

$m$  es la masa del cuerpo,  $x_1$  es su posición y  $x_2$  es su velocidad.  $F$  es la fuerza aplicada al sistema y  $\psi$  es el negativo de la no linealidad, multivaluada en  $x_2 = 0$ , mostrada en la Figura 3, que representa la fuerza de oposición al movimiento ejercida por el cuerpo, debida a la fricción viscosa y estática. El coeficiente de fricción viscosa es  $\mu_v$ , y corresponde a la pendiente en la gráfica de la Figura 3 para  $x_2 \neq 0$ . En forma matricial:

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = Ax + BF + G\xi, \\ \xi \in \psi(\sigma), \\ y = Cx, \sigma = Hx, \end{cases}$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0],$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad H = [0 \ 1]$$

Para los valores numéricos se ha considerado que la masa  $m = 1$ .

El observador se define con la estructura propuesta en (17). El sistema que describe la dinámica del error es, a la manera de (20),

$$\Xi : \begin{cases} \dot{e} = (A + LC)e + G\eta \\ e(0) = e_0 \\ \eta \in -\phi(z, \sigma) \\ z = (H + NC)e, \end{cases} \quad (23)$$

con

$$\phi(z, \sigma) \triangleq \psi(\sigma) - \psi(\sigma + z). \quad (24)$$

El mapa  $\phi$  que resulta en este caso, para varios valores de  $\sigma$ , se puede ver en la Figura 4.

La condición previa para el diseño del observador

cuando el sistema incluye funciones multivaluadas es que  $\Xi$  cumpla con las condiciones del Teorema 2, lo que implica que la no linealidad  $\phi$  debe cumplir con la Suposición 1.

Cuando  $\sigma$  es diferente de cero, la no linealidad es univaluada y continua en todas partes excepto en  $z = -\sigma$ . En este punto, la no linealidad tiene valores en un conjunto no vacío, compacto y convexo. La función cumple con la semicontinuidad por arriba pues el conjunto incluye los valores límite de la función cuando  $z$  tiende a  $-\sigma$ . Cuando  $\sigma = 0$ ,  $\phi$  es multivaluada para todo  $z$ . El conjunto que define a  $\phi$  para cada valor de  $z$  cumple con las condiciones dadas en la Suposición 1, y por tanto, es posible afirmar que la solución del sistema dado por (20) existe.

Una vez se asegura la existencia de soluciones, es necesario diseñar  $L$  y  $N$  de manera que el origen de  $\Xi$  sea estable según el Lema 1. Para usarlo es necesario identificar las matrices  $Q$ ,  $S$  y  $R$  que determinan la disipatividad de  $\phi$ . En la Figura 4 se grafica  $\phi(z, \sigma)$  para varios valores de  $\sigma$ .

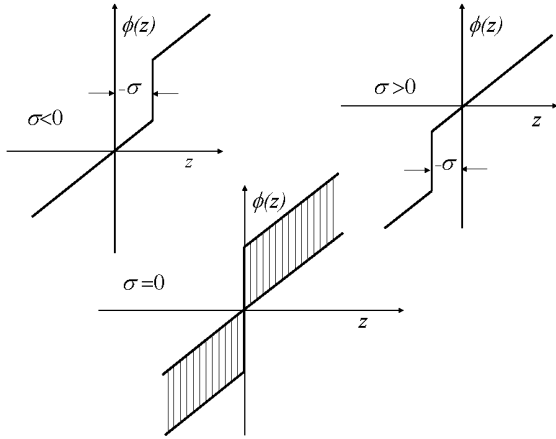


Figura 4.  $\phi(z, \sigma)$  para diferentes valores de  $\sigma$

$$\phi(z, \sigma) = \begin{cases} \mu_v z + 2F_m \text{Signo}(z) & |z| > |\sigma|, \sigma \neq 0 \\ \mu_v z & |z| < |\sigma|, \sigma \neq 0 \\ \mu_v z + 2\kappa \text{Signo}(z), & z = \sigma, \sigma \neq 0 \\ \kappa \in [0, F_m] & \vee \\ & \sigma = 0, z \neq 0 \\ [-2F_m, 2F_m] & \sigma = 0, z = 0 \end{cases} \quad (25)$$

En este caso, hallar  $Q$ ,  $S$  y  $R$  equivale a encontrar los valores  $(k_1, k_2)$  que definen el sector determinado por la desigualdad (12) cuando la no linealidad es escalar:  $(\phi - k_1 z)(k_2 z - \phi) \geq 0$ . La Figura 4 sugiere que  $\phi \in [k_1, \infty]$ , con  $k_1 = \mu_v$ . La desigualdad anterior quedaría entonces  $(\phi - \mu_v z)z \geq 0$ . Verificando esto para cada intervalo de la función:

- $|z| > |\sigma|, \sigma \neq 0$   
 $(\phi - \mu_v z)z = 2zF_m \text{Signo}(z) > 0$
- $|z| < |\sigma|, \sigma \neq 0$   
 $(\phi - \mu_v z)z = 0$

- $z = \sigma, \sigma \neq 0 \vee \sigma = 0, z \neq 0$   
 $(\phi - \mu_v z)z = 2z\kappa \text{Signo}(z) > 0,$   
ya que  $\kappa > 0$ .
- $\sigma = 0, z = 0$   
 $(\phi - \mu_v z)z = 0$

De la desigualdad  $\phi z - \mu_v z^2 \geq 0$  se puede identificar  $Q = 0$ ,  $S = 1/2$  y  $R = -\mu_v$ . Para hallar  $L$  y  $N$  se resuelve la desigualdad matricial en (21). Dado que  $Q = 0$ ,  $PG = (H + NC)^T S^T$ . Fijando  $N = 0,5$ :

$$PG = (H + NC)^T S^T$$

$$\begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

se obtienen  $p_{12} = 0,25$  y  $p_{22} = 0,5$ . Con esta condición, la desigualdad (21) se cumple asegurando que

$$P(A + LC) + (A + LC)^T P + (H + NC)^T R(H + NC) < 0,$$

lo que se satisface con  $L = [-2 \ -1]^T$ ,  $N = 0,5$  y  $P = \begin{bmatrix} 5 & 0,25 \\ 0,25 & 0,5 \end{bmatrix}$ , cuando  $R = -\mu_v = -1$ .

El observador se simuló utilizando Matlab<sup>®</sup>, para lo cual, la planta se estimuló con una fuerza que va desde un valor dentro del rango de la fricción estática, a uno positivo que logra vencerla. En la Figura 5 se puede ver el comportamiento de los estados del sistema y del observador en el tiempo, considerando diferentes valores iniciales, cuando el estado inicial del observador es nulo.

Figura 5. Comparación de esta dos reales y observados para varios valores iniciales de la velocidad y la posición

Por vía de comparación, se diseñó un observador de alta ganancia (Boizot and Busvelle, 2007). Dado que, como la mayoría de los observadores, el de alta ganancia no está definido cuando en el sistema existen no linealidades multivaluadas, se utilizó una estrategia similar a la de (Vargas and Moreno, 2005), en donde se usan funciones Lipschitz para aproximar no linealidades continuas, pero no Lipschitz, existentes en el sistema a

observar, de manera que se obtienen observadores aproximados desde el punto de vista de las trayectorias. Allí, las aproximaciones no se aplican a funciones multivaluadas, como se hace aquí, pero el procedimiento que se utiliza es aplicable. La no linealidad asociada a la fricción en el presente ejemplo se aproximó entonces mediante una función Lipschitz  $\vartheta(\hat{\sigma}) = F_m \tanh(\lambda\hat{\sigma}) + \mu_v\hat{\sigma}$ , definiéndose  $F_m$  como en la no linealidad  $\psi$ , y siendo  $\lambda$  un parámetro que determina la precisión de la aproximación, mayor a medida que  $\lambda$  crece. La estructura del observador de alta ganancia es:

$$\Omega = \begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + BF + \Delta_{\Theta}K(C\hat{x} - y) + \vartheta(\hat{\sigma}) \\ \dot{\hat{\sigma}} = H\hat{x}. \end{cases} \quad (26)$$

$\hat{x}$  es el estado estimado por el observador.  $\Delta_{\Theta}$  es la matriz de alta ganancia  $\text{diag}(\Theta, \Theta^2)$  que permite manipular la velocidad de convergencia, y  $K$  se define de tal forma que la matriz  $A + KC$  sea Hurwitz. Se utilizó  $K = [-1 \ -1]^T$ . Se simuló el comportamiento del observador con  $\Theta = 5$ , ante una entrada que pasa de 4.8 a 5.8, cuando el máximo del valor absoluto de la fuerza de fricción estática es  $|F_m| = 5$  y el coeficiente de fricción viscosa es  $\mu_v = 1$ . Se definió  $\lambda = 10$ . Se observa en la Figura 6 la comparación con el resultado del observador disipativo bajo las mismas condiciones. Para la prueba mostrada en la Figura 6, las condiciones iniciales del sistema son  $x_1(0) = 0$  y  $x_2(0) = 1$ , y las condiciones iniciales de ambos observadores son nulas.

Figura 6. Comparación de estados reales y observados con observador de alta ganancia y disipativo

El observador de alta ganancia presenta una adecuada convergencia en la zona lineal, la cual se puede hacer más rápida incrementando  $\Theta$ , a costa de incrementar la magnitud del transitorio, tal como es usual en este tipo de observadores. Se presentan también transitorios cada que la señal de entrada al sistema cambia abruptamente. La convergencia del observador disipativo puede ser mas lenta, como se puede ver en el caso de la posición, pero una vez se alcanza error nulo, éste

se mantiene.

Es interesante considerar la situación que se presenta en la zona correspondiente a la multivaluación ( $x_2 = 0$ ). Con la masa en reposo, como se puede ver en la Figura 6, los estados del observador de alta ganancia no convergen a los del sistema original, en tanto los del observador disipativo si lo hacen. Esto es debido a que la no linealidad multivaluada puede tomar diferentes valores, según sea la señal de entrada, cuando ésta se encuentra en el rango de la fricción estática. Por ello, se realizaron ensayos mas detallados de esa zona y pueden observarse en la Figura 7 las respuestas de ambos observadores cuando la fuerza de entrada se encuentra en el rango estático  $F = -4,9$ . Las condiciones iniciales del sistema son  $x_1(0) = 0$  y  $x_2(0) = 2$ , y las condiciones iniciales de ambos observadores son nulas. El observador de alta ganancia presenta error de estado estable, a diferencia del observador disipativo, cuya estados convergen exactamente a los del sistema observado. Es cierto que el error de estado estable del observador de alta ganancia puede llegar a reducirse incrementando  $\Theta$ , pero nunca desaparece realmente, presentándose siempre el consabido incremento en la magnitud del transitorio, que puede llegar a ser muy apreciable.

Figura 7. Comparación de estados reales y observados con observador de alta ganancia y disipativo

Para este sistema en especial, bajo ciertas condiciones, podría haberse usado un observador para sistemas híbridos, tal como los propuestos en (Alessandri and Coletta, 2003), (Alessandri *et al.*, 2007) o (Juloski *et al.*, 2002), pero el método presentado tiene la ventaja de no requerir información sobre el modo vigente de funcionamiento, tal como se exige en (Alessandri and Coletta, 2003), ni linealidad en las zonas de operación fuera de la región multivaluada o de conmutación. Por ejemplo, si en vez de un modelo lineal para la fricción viscosa, se hubiera usado un modelo cuadrático, como  $\psi(\sigma) = F_m \text{Signo}(\sigma) + \mu_v\sigma +$



$k\sigma|\sigma|$ , habría podido utilizarse exactamente el mismo diseño presentado.

## 5. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha aplicado con éxito la metodología de diseño de observadores llamada Técnica de Diseño Disipativo a sistemas con no linealidades multivaluadas, o discontinuas, previa convexificación. Esta técnica generaliza y mejora algunos métodos de diseño de observadores y, en particular, elimina las restricciones del método propuesto en (Heemels *et al.*, 2005) y (Juloski *et al.*, 2006). Puede ser aplicada a sistemas con no linealidades discontinuas, no monótonas, no cuadradas, y no requiere unicidad de soluciones del observador. En el caso de soluciones múltiples, la respuesta del observador converge a la solución específica que se presente en el sistema.

## 6. AGRADECIMENTOS

Trabajo patrocinado por la DGAPA-UNAM, proyecto PAPIIT IN 112207-3, por Colciencias, a través del Programa de Movilidad Internacional de Investigadores y por UPB, en apoyo becario a estudios doctorales de la primera autora.

## REFERENCIAS

- Alessandri, A. and P. Coletta (2003). Design of observers for switched discrete time linear systems. In: *Proceedings of the American Control Conference*. pp. 2785–2790.
- Alessandri, A., M. Baglietto and G. Battistelli (2007). Design of observers with commutation-dependent gains for linear switching systems. In: *Proceedings of American Control Conference*. pp. 2090–2095.
- Arcak, M. and P. Kokotovic (2001). Nonlinear observers: a circle criterion design and robustness analysis. *Automatica* **37**(12), 1923–1930.
- Aubin, J. P. and A. Cellina (1984). *Differential Inclusions; Set-Valued Maps and Viability Theory*. Springer-Verlag. Berlin.
- Bacciotti, A. and L. Rosier (2001). *Liapunov Functions and Stability in Control Theory*. Vol. 267 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer-Verlag. London.
- Boizot, N. and E. Busvelle (2007). *Nonlinear Observers and Applications*. Chap. Adaptive-Gain Observers and Applications, pp. 71–112. Number 363 In: *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer.
- Davila, J., L. Fridman and A. Levant (2005). Second-order sliding-modes observer for mechanical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* **50**(11), 1785–1789.
- Davila, J., L. Fridman and A. Poznyak (2006). Observation and identification of mechanical systems via second order sliding modes. *International Journal of Control* **79**(10), 1251–1262.
- Deimling, K. (1992). *Multivalued Differential Equations*. Gruyer. Berlin.
- Dontchev, A. and F. Lempio (1992). Difference methods for differential inclusions: A survey. *SIAM Review* **34**, 263–294.
- Drakunov, S. V. and V. I. Utkin (1995). Sliding-mode observers tutorials. In: *Proceedings of 34 Conference on Decision and Control*. New Orleans.
- Filippov, A. F. (1988). *Differential Equations with Discontinuous Righthand side*. Mathematics and its Applications (Soviet Series). Kluwer. Dordrecht, The Netherlands.
- Gauthier, J. P., H. Hammouri and S. Othman (1992). A simple observer for nonlinear systems. Applications to bioreactors. *IEEE Trans. Automatic Control* **37**, 875–880.
- Haskara, I., Ü. Özgüner and V. Utkin (1998). On sliding mode observers via equivalent control approach. *International Journal of Control* **71**, 1051–1067.
- Heemels, W. P., A. L. Juloski and B. Brogliato (2005). Observer design for lur'e systems with monotonic multivalued mappings. In: *Preprints of the 16th IFAC World Congress (IFAC, Ed.)*. IFAC. Prague, Czech Republic.
- Hill, D. J. and P. J. Moylan (1980). Dissipative dynamical systems: Basic input-output and state properties. *Journal of the Franklin Institute* **309**, 327–357.
- Juloski, A. L. (2004). Observer Design and Identification Methods for Hybrid Systems: Theory and Experiments. PhD thesis. Eindhoven University of Thechnology.
- Juloski, A., N. Mihajlovic, W. Heemels, N. Van de Wouw and H. Nijmeijer (2006). Observer design for an experimental rotor system with discontinuous friction. In: *Proceedings of the 2006 American Control Conference*. ACC. Minneapolis, Jun. 14-16. pp. 2886–2891.
- Juloski, A., W. Heemels and S. Weiland (2002). Observer design for a class of piece-wise affine systems. In: *Proceedings of the Conference on Decision and Control*. pp. 2606–2611.
- Juloski, A., W. Heemels and S. Weiland (2007). Observer design for a class of piecewise linear systems. *Int. J. Robust Nonlinear Control* **17**, 1387–1404.
- Khalil, H. K. (1999). High-gain observers in nonlinear feedback control. In: *New Directions in Nonlinear Observer Design* (H. Nijmeijer and T.I. Fossen, Eds.). pp. 249–268. Number 244 In: *Lecture notes in control and information sciences*. Springer-Verlag. London.

- Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear Systems*. 3rd. ed.. Prentice–Hall. Upsaddle River, New Jersey.
- Moreno, J. A. (2004). Observer design for nonlinear systems: A dissipative approach. In: *Proceedings of the 2nd IFAC Symposium on System, Structure and Control SSSC2004*. IFAC. Oaxaca, Mexico, Dec. 8-10, 2004. pp. 735–740.
- Moreno, J. A. (2005). *Control and Observer Design for Nonlinear Finite and Infinite Dimensional Systems*. Chap. Aproximate Observer Error Linearization by Dissipativity Methods, pp. 35–51. Number 322 In: *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer-Verlag. Berlin.
- Moreno, J. A. (2006). A separation property of dissipative observers for nonlinear systems. In: *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control (CDC2006)*. IEEE. San Diego. pp. 1647–1652.
- Teel, A. R., R. G. Sanfelice, R. I. Goebel and Ch. Cai (2006). Workshop on robust hybrid systems: Theory and applications. In: *Proceedings of 45th Conference on Decision and Control*. IEEE. San Diego, Dec. 12-15.
- Thau, F. E. (1973). Observing the state of nonlinear dynamic systems. *Int J. Control* **17**, 471–479.
- Van der Schaft, A. (2000). *L<sub>2</sub>-Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control*. 2nd. ed.. Springer-Verlag. London.
- Vargas, A. and J. Moreno (2005). Approximate high gain observers for non-lipschitz observability form. *International Journal of Control* **78**, 247–253.
- Willems, J. C. (1972a). Dissipative dynamical systems, part I: General theory. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* **45**, 321–351.
- Willems, J. C. (1972b). Dissipative dynamical systems, part II: Linear systems with quadratic supply rates. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* **45**, 352–393.
- Xiong, Y. and M. Saif (2001). Sliding mode observer for nonlinear uncertain systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* **46**(12), 2012–2017.
- Yakubovich, V. A., G. A. Leonov and A. Kh. Gel'fand (2004). *Stability of Stationary Sets in Control Systems with Discontinuous Nonlinearities*. Vol. 14 of *Series on Stability, Vibration and Control of Systems*. World Scientific. Singapore.