

## MEDIDAS DE CALIDAD PARA LA PRENSIÓN DE OBJETOS<sup>1</sup>

Máximo Roa<sup>2</sup>, Raúl Suárez, Jordi Cornellà<sup>3</sup>

*Instituto de Organización y Control de Sistemas Industriales (IOC)  
Universidad Politécnica de Cataluña (UPC)  
Barcelona, España.*

Resumen: La presión correcta de objetos es un aspecto clave para la ejecución de muchas tareas. En robótica, el desarrollo de elementos prensores cada vez más complejos y versátiles, como manos mecánicas, incrementa la necesidad de disponer de algoritmos para la determinación automática de presiones, surgiendo de forma paralela la necesidad de cuantificar su calidad de cara a su optimización. En este artículo se presenta una revisión de las medidas de calidad propuestas en la literatura especializada para evaluar la calidad de una presión. Las medidas de calidad se clasifican en dos grupos según el aspecto principal evaluado: la localización de los puntos de contacto sobre el objeto o la configuración de la mano mecánica. También se revisan los enfoques que combinan diferentes medidas de calidad de los dos grupos anteriores para obtener una medida de calidad global.  
*Copyright © 2008 CEA-IFAC*

Palabras Clave: presión, manos mecánicas, medidas de calidad para presiones.

### 1. INTRODUCCIÓN

La presión y manipulación de objetos mediante elementos prensores complejos, como manos mecánicas, es un área de gran interés en robótica. El objetivo de una presión es restringir el movimiento del objeto de forma que se puedan resistir perturbaciones externas (incluyendo el peso del objeto), problema similar al diseño de fijaciones (*fixtures*) para piezas industriales (Brost and Goldberg, 1996; Wang, 2000). La manipulación diestra de objetos implica además cambiar la po-

sición del objeto respecto a la mano sin necesidad de apoyos externos.

La planificación o síntesis de presiones (determinación de los puntos de contacto de los dedos sobre un objeto y selección de una configuración apropiada del elemento prensor) se ha realizado mediante dos enfoques (Mishra and Silver, 1989): un enfoque empírico (fisiológico), en donde se intenta imitar el comportamiento de la mano humana (Cutkosky, 1989), y un enfoque analítico (mecánico), en donde se consideran las propiedades físicas y mecánicas que intervienen en la presión (Shimoga, 1996). La planificación empírica de presiones se ha realizado utilizando herramientas como lógica difusa (Bowers and Lumia, 2003), redes neuronales (Leoni *et al.*, 1998) o sistemas basados en conocimiento (Bekey *et al.*, 1993). La síntesis analítica de presiones se ha desarrollado para objetos bidimensionales poligonales (Liu, 2000) o no poligonales (Cornellà

<sup>1</sup> Este trabajo ha sido parcialmente financiado por los proyectos CICYT DPI2005-00112 y DPI2007-63665, y Acción Integrada HI2005-0290.

<sup>2</sup> Máximo Roa es profesor en la Universidad Nacional de Colombia; actualmente trabaja en el IOC-UPC financiado por el programa Alβan, beca No. E04D039103CO.

<sup>3</sup> Jordi Cornellà es actualmente "Marie Curie Experienced Researcher" en The Interventional Centre, Rikshospitalet University Hospital - University of Oslo, Oslo (Norway).

Tabla 1. Revisiones previas sobre prensión y manipulación con manos mecánicas.

Investigadores	Tema
Mishra y Silver (1989)	Planificación de prensiones
Gruppen et al. (1989)	Tecnología para la construcción de manos mecánicas
Murray et al. (1994)	Fundamentos matemáticos de la manipulación robótica
Bicchi (1995)	Análisis del cierre de fuerza y de forma
Mishra (1995)	Análisis matemático de las medidas de calidad
Shimoga (1996)	Algoritmos de síntesis de prensiones y medidas de destreza
Bicchi (2000)	Estado del arte en manos mecánicas
Bicchi y Kumar (2000)	Prensión con manos mecánicas
Okamura et al. (2000)	Estado del arte en manipulación diestra
Lotti y Vassura (2002)	Clasificación y evaluación de manos mecánicas
Tegin y Wikander (2005)	Sistemas táctiles para robots

and Suárez, 2005a), y para objetos tridimensionales poliédricos (Ponce *et al.*, 1997), descritos por superficies complejas (Zhu and Wang, 2003) o discretizadas (Liu *et al.*, 2004c; Roa and Suárez, 2007). Estos algoritmos de planificación de prensiones toman en consideración fundamentalmente las siguientes propiedades (Shimoga, 1996):

- *Resistencia ante perturbaciones externas:* una prensión es capaz de resistir perturbaciones externas en cualquier dirección si existe: cierre de forma (*form-closure*), cuando las posiciones de los dedos aseguran la inmovilidad del objeto, o cierre de fuerza (*force-closure*) cuando las fuerzas aplicadas por los dedos pueden compensar cualquier perturbación externa aplicada sobre el objeto, hasta una cierta magnitud (Bicchi, 1995; Rimon and Burdick, 1996).
- *Destreza:* una prensión es diestra cuando la mano puede mover el objeto de forma compatible con la tarea a realizar. Si no hay especificaciones de la tarea, se considera que una prensión es diestra cuando el dispositivo manipulador es capaz de mover el objeto en cualquier dirección.
- *Equilibrio:* una prensión está en equilibrio cuando la resultante de las fuerzas generalizadas aplicadas sobre el objeto es cero. Un problema asociado es la búsqueda del equilibrio minimizando las fuerzas aplicadas por los dedos (Kerr and Roth, 1986; Liu *et al.*, 2004a).
- *Estabilidad:* una prensión es estable si cualquier error en la posición o fuerza de los dedos debido a una perturbación tiende a desaparecer una vez que esta lo ha hecho, lo que implica la generación de fuerzas específicas de recuperación (Howard and Kumar, 1996; Lin *et al.*, 1997; Bruyninckx *et al.*, 1998).

Para un objeto dado existen numerosas prensiones posibles, por lo que se intenta buscar la prensión óptima según una medida de calidad adecuada. Este trabajo se centra en las medidas de calidad relacionadas con las propiedades de resistencia ante perturbaciones externas y de destreza, las más usadas en la síntesis analítica de prensiones.

En la Tabla 1 se resumen los principales trabajos de revisión del estado del arte sobre aspectos relacionados con prensión y manipulación

de objetos mediante manos mecánicas. En ella se incluyen los siguientes trabajos, directamente relacionados con medidas de calidad en prensión: descripción de los conceptos matemáticos requeridos para estudiar las medidas de calidad teniendo en cuenta la resistencia ante perturbaciones externas (Mishra, 1995); revisión de los algoritmos para la síntesis de prensiones, incluyendo medidas de calidad relacionadas con la configuración del elemento prensor (Shimoga, 1996); y descripción del estado del arte en prensión robótica, incluyendo una discusión de la relevancia de las medidas de calidad en la prensión (Bicchi and Kumar, 2000).

Después de esta introducción, el artículo está estructurado de la siguiente forma. En la Sección 2 se resumen los conceptos básicos requeridos para formalizar las medidas de calidad de una prensión. En la Sección 3 se presentan las medidas relacionadas con la posición de los puntos de contacto sobre el objeto, y en la Sección 4 se presentan las relacionadas con la configuración del elemento prensor. En la Sección 5 se presentan los enfoques que combinan diferentes medidas de calidad de los dos grupos anteriores para obtener una medida de calidad global. Finalmente, la Sección 6 presenta las conclusiones del trabajo.

## 2. NOMENCLATURA Y NOCIONES BÁSICAS

### 2.1 Modelado del contacto

Las fuerzas aplicadas por los dedos pueden actuar solamente empujando el objeto (restricción de positividad), y el tipo de contacto entre los dedos y el objeto puede ser (Figura 1):

- *Contacto puntual sin fricción:* la fuerza aplicada sobre el objeto es siempre normal a la superficie de contacto.
- *Contacto puntual con fricción:* la fuerza aplicada tiene una componente normal a la superficie de contacto, y puede tener otra componente tangencial cuyo valor depende del modelo de fricción. Existen varios modelos para representar la fricción (Howe *et al.*, 1988), siendo el más utilizado el de Coulomb.

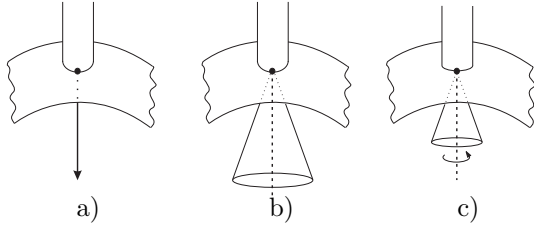


Figura 1. Fuerzas permitidas en el contacto:  
a) Puntual sin fricción; b) Puntual con fricción; c) Blando.

- *Contacto blando*: permite la aplicación de las mismas fuerzas que en el contacto rígido, más un par alrededor de la dirección normal a la zona de contacto, por lo que el modelo es válido sólo para objetos tridimensionales (Buss *et al.*, 1996; Xydas and Kao, 1999).

El número  $r$  de componentes independientes no nulas de las fuerzas generalizadas aplicadas en cada punto de contacto dependen del tipo de contacto:  $r = 1$  para el contacto puntual sin fricción; para el contacto puntual con fricción  $r = 2$  en el espacio físico bidimensional y  $r = 3$  en el tridimensional, y  $r = 4$  para el contacto blando.

## 2.2 Modelado de posiciones, fuerzas y velocidades

Una fuerza  $\mathbf{F}_i$  aplicada sobre el objeto en el punto  $\mathbf{p}_i$  genera un par  $\boldsymbol{\tau}_i = \mathbf{p}_i \times \mathbf{F}_i$  con respecto al centro de masa del objeto ( $CM$ ). La fuerza y el par se agrupan en un vector de fuerza generalizada (*wrench*)  $\boldsymbol{\omega}_i = (\mathbf{F}_i, \lambda \boldsymbol{\tau}_i)^T$ , siendo  $\lambda$  una constante que define la métrica del espacio de fuerzas generalizadas. La dimensión de  $\boldsymbol{\omega}$  es  $d = 3$  para objetos 2D y  $d = 6$  para objetos 3D.

El movimiento del objeto se describe mediante la velocidad traslacional de  $CM$ ,  $\mathbf{V}_{CM}$ , y la velocidad rotacional  $\boldsymbol{\psi}$  del objeto con respecto a  $CM$ ; las dos velocidades se representan mediante una velocidad generalizada (*twist*)  $\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{V}_{CM}, \boldsymbol{\psi})^T \in \mathbb{R}^d$ .

La fuerza  $\mathbf{f}_i$  aplicada por la punta del dedo  $i$  se produce por los pares  $\mathbf{T}_{ij}$ ,  $j = 1, \dots, m$ , aplicados en cada una de sus  $m$  articulaciones. En una mano con  $n$  dedos, se define un vector  $\mathbf{T} = [\mathbf{T}_{1j}^T \dots \mathbf{T}_{nj}^T]^T \in \mathbb{R}^{nm}$  para agrupar todos los torques aplicados en las articulaciones de cada dedo. Las velocidades  $\dot{\boldsymbol{\theta}}_{ij}$  en las articulaciones de los dedos también se agrupan en un único vector  $\dot{\boldsymbol{\theta}} = [\dot{\boldsymbol{\theta}}_{1j}^T \dots \dot{\boldsymbol{\theta}}_{nj}^T]^T \in \mathbb{R}^{nm}$ .

Las fuerzas y velocidades en cada extremo de un dedo pueden expresarse en un sistema de referencia definido en cada punto de contacto. Así, el vector  $\mathbf{f} = [\mathbf{f}_{1k}^T \dots \mathbf{f}_{nk}^T]^T \in \mathbb{R}^{nr}$  ( $k = 1, \dots, r$ ) agrupa todas las componentes de fuerza aplicada en los puntos de contacto, y el vector

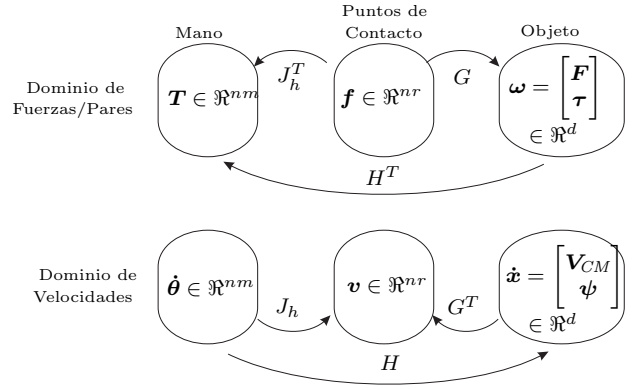


Figura 2. Relaciones entre los dominios de fuerza y velocidad en la presión.

$\mathbf{v} = [\mathbf{v}_{1k}^T \dots \mathbf{v}_{nk}^T]^T \in \mathbb{R}^{nr}$  contiene todas las componentes de velocidad en las puntas de los dedos.

## 2.3 Relaciones entre fuerzas y velocidades

Las fuerzas y velocidades asociadas con el objeto, la mano y los puntos de contacto satisfacen las siguientes relaciones, ilustradas en la Figura 2 (Murray *et al.*, 1994):

Las fuerzas  $\mathbf{f}$  y velocidades  $\mathbf{v}$  en las puntas de los dedos se relacionan con los pares  $\mathbf{T}$  y velocidades  $\dot{\boldsymbol{\theta}}$  en las articulaciones de los dedos mediante el Jacobiano de la mano,  $J_h = \text{diag}[J_1, \dots, J_n] \in \mathbb{R}^{nr \times nm}$  en donde  $J_i \in \mathbb{R}^{r \times m}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , es el Jacobiano del dedo  $i$  que relaciona las variables en las articulaciones con las variables en la punta del dedo:

$$\mathbf{T} = J_h^T \mathbf{f} \quad (1)$$

$$\mathbf{v} = J_h \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (2)$$

La relación entre las fuerzas  $\mathbf{f}$  en las puntas de los dedos y la fuerza generalizada neta  $\boldsymbol{\omega}$  aplicada sobre el objeto, y la relación entre las velocidades  $\mathbf{v}$  en los puntos de contacto y la velocidad generalizada  $\dot{\mathbf{x}}$  se establece a través de la matriz de presión  $G \in \mathbb{R}^{d \times nr}$  (también llamada Jacobiano o mapa de la presión):

$$\boldsymbol{\omega} = G \mathbf{f} \quad (3)$$

$$\mathbf{v} = G^T \dot{\mathbf{x}} \quad (4)$$

Finalmente, la relación entre las variables de la mano y el objeto está dada por el Jacobiano mano-objeto  $H = (G^+)^T J_h \in \mathbb{R}^{d \times nm}$ , donde  $G^+$  es la inversa generalizada de  $G$  (usualmente  $G$  no es una matriz cuadrada). Así,

$$\mathbf{T} = H^T \boldsymbol{\omega} \quad (5)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = H \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (6)$$

Una mano mecánica puede ser considerada como un transformador mecánico con los torques  $\mathbf{T}$  o velocidades  $\dot{\boldsymbol{\theta}}$  en los dedos como entradas y las fuerzas  $\boldsymbol{\omega}$  o velocidades generalizadas  $\dot{\mathbf{x}}$  del objeto

como salidas (Chiu, 1987). Dada una esfera de radio unitario en el dominio de velocidad de las articulaciones de la mano,

$$\|\dot{\theta}\|^2 = \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dots + \dot{\theta}_{nm}^2 \leq 1 \quad (7)$$

la ecuación (6) transforma esta esfera en un elipsoide en el dominio de velocidades generalizadas del objeto, conocido como el elipsoide de velocidad:

$$\dot{x}^T (HH^T)^{-1} \dot{x} \leq 1 \quad (8)$$

De forma similar, la ecuación (5) transforma una esfera unitaria en el dominio de pares de las articulaciones de la mano en un elipsoide en el dominio de fuerza generalizada, conocido como el elipsoide de fuerza:

$$\omega^T (HH^T) \omega \leq 1 \quad (9)$$

El elipsoide de velocidad (fuerza) representa la ganancia en cada dirección del dominio de velocidad (fuerza) generalizada del objeto cuando se aplica una velocidad (par) unitaria en cada articulación de la mano. Las matrices  $HH^T$  y  $(HH^T)^{-1}$ , que definen los elipsoides de fuerza y velocidad respectivamente, tienen los mismos valores y vectores propios, por lo que reciben el nombre genérico de elipsoides de manipulabilidad (Yoshikawa, 1984). Los ejes principales de los dos elipsoides coinciden pero sus longitudes están en proporción inversa, por lo que la dirección con la máxima relación de transmisión de velocidades tiene la mínima relación de transmisión de fuerza, y viceversa (Chiu, 1987).

### 3. MEDIDAS DE CALIDAD RELACIONADAS CON LA POSICIÓN DE LOS PUNTOS DE CONTACTO SOBRE EL OBJETO

El primer grupo de medidas de calidad incluye aquellas en las que únicamente se consideran las propiedades del objeto (forma, tamaño, peso), las restricciones de fricción y las condiciones de cierre de forma y de fuerza para determinar la calidad de la presión. Estas medidas se han clasificado en tres subgrupos: uno que considera solamente las propiedades algebraicas de la matriz de presión  $G$ , otro que considera las relaciones geométricas de la presión, asumiendo en estos dos casos que los dedos pueden realizar fuerzas de cualquier magnitud, y un tercero en el que se consideran límites en las magnitudes de las fuerzas que pueden aplicar los dedos.

#### 3.1 Medidas basadas en propiedades algebraicas de la matriz de presión $G$

**3.1.1. Valor singular mínimo de  $G$ .** Una matriz de presión  $G \in \mathbb{R}^{d \times nr}$  de rango completo tiene

$d$  valores singulares dados por la raíz cuadrada positiva de los valores propios de  $GG^T$ . Cuando una presión se encuentra en una configuración singular (esto es, cuando se pierde al menos un grado de libertad debido a la configuración de la mano), al menos uno de los valores singulares se hace cero. El valor singular mínimo de la matriz de presión  $G$ ,  $\sigma_{\min}(G)$ , es una medida de calidad que indica que tan lejos se encuentra la configuración de presión de caer en una configuración singular (Li and Sastry, 1988), es decir

$$Q = \sigma_{\min}(G) \quad (10)$$

A mayor  $\sigma_{\min}(G)$  se obtiene una mejor presión, y mayor es la contribución mínima (relación de transmisión) de las fuerzas  $f$  en los puntos de contacto a la fuerza generalizada  $\omega$  resultante sobre el objeto (Kim *et al.*, 2001). Una desventaja de esta medida de calidad es que no es invariante ante un cambio en el sistema de referencia usado para calcular los pares.

**3.1.2. Volumen del elipsoide en el espacio de fuerzas generalizadas.** El efecto de la matriz de presión  $G$  en las relaciones de transformación dadas por las ecuaciones (3) y (4) se visualiza mediante elipsoides, similares a los presentados en la Subsección 2.3. La ecuación (3) mapea una esfera de radio unitario en el dominio de fuerza de los puntos de contacto en un elipsoide en el espacio de fuerza generalizada. La contribución global de todas las fuerzas de contacto puede valorarse usando como medida de calidad el volumen de este elipsoide (Li and Sastry, 1988):

$$Q = k \sqrt{\det(GG^T)} = k (\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_d) \quad (11)$$

en donde  $k$  es una constante y  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_d$  son los valores singulares de la matriz de presión  $G$ . A diferencia de la anterior, esta medida de calidad considera todos los valores singulares con el mismo peso, y debe ser maximizada para obtener la presión óptima. Esta medida es invariante ante un cambio en el sistema de referencia usado para calcular los pares.

**3.1.3. Índice de isotropía de la presión.** Este criterio busca una contribución uniforme de las fuerzas de contacto a la fuerza generalizada total ejercida sobre el objeto, es decir, trata que las magnitudes de las fuerzas internas sean similares. Esta medida de calidad se define como:

$$Q = \frac{\sigma_{\min}(G)}{\sigma_{\max}(G)} \quad (12)$$

donde  $\sigma_{\max}(G)$  y  $\sigma_{\min}(G)$  son los valores singulares máximo y mínimo de  $G$  (Kim *et al.*, 2001). Este índice se aproxima a 1 cuando la presión es isotrópica (caso óptimo), y cae a cero cuando la presión está cerca a una configuración singular.

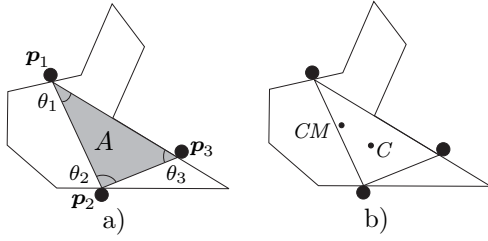


Figura 3. Ejemplos de medidas basadas en relaciones geométricas: a) Ángulos internos y área del polígono de presión; b) Distancia entre el centroide  $C$  del polígono de presión y el centro de masa  $CM$  del objeto.

### 3.2 Medidas basadas en relaciones geométricas

**3.2.1. Forma del polígono de presión.** En presiones coplanares (de objetos 2D o 3D) es deseable que los puntos de contacto estén distribuidos de manera uniforme sobre la superficie del objeto para mejorar la estabilidad de la presión (Park and Starr, 1992; Mirtich and Canny, 1994). Un índice para cuantificar esta distribución uniforme compara que tan alejados están los ángulos internos del polígono de presión (cuyos vértices son los puntos de contacto sobre el objeto, como se ilustra en la Figura 3a) de los del polígono regular correspondiente (Kim *et al.*, 2001); entonces, el índice está dado por

$$Q = \frac{1}{\theta_{\max}} \sum_{i=1}^n |\theta_i - \bar{\theta}| \quad (13)$$

en donde  $n$  es el número de dedos,  $\theta_i$  es el ángulo interno en el vértice  $i$  del polígono de contacto,  $\bar{\theta}$  es el ángulo interno del correspondiente polígono regular (dado en grados por  $\bar{\theta} = 180(n-2)/n$ ), y  $\theta_{\max} = (n-2)(180 - \bar{\theta}) + 2\bar{\theta}$  es la suma de los ángulos internos cuando el polígono tiene la forma peor condicionada (esto es, cuando degenera en una línea y los ángulos internos son bien 0 ó  $\pi$ ). El índice de calidad es mínimo (óptimo) cuando el polígono de contacto es regular.

**3.2.2. Área del polígono de presión.** Una presión con tres dedos puede resistir mayores pares externos con las mismas fuerzas en los dedos cuanto mayor es el triángulo formado por los puntos de contacto  $\mathbf{p}_1$ ,  $\mathbf{p}_2$  y  $\mathbf{p}_3$  (Figura 3a) (Mirtich and Canny, 1994; Chinellato *et al.*, 2003), por lo que se toma como medida de calidad:

$$Q = \text{Área}(\text{Triángulo}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)) \quad (14)$$

Esta idea podría extenderse a presiones de objetos 2D y presiones coplanares en 3D que involucren más de 3 dedos, maximizando el área o volumen del casco convexo de los puntos de contacto.

**3.2.3. Distancia entre el centroide del polígono de contacto y el centro de masa del objeto.** El

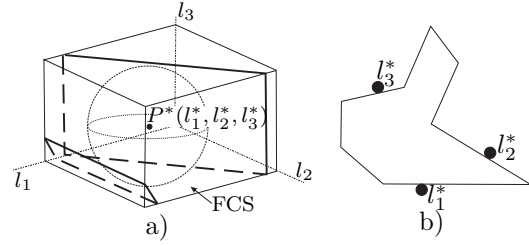


Figura 4. Maximización del margen de incertidumbre: a) Hiperesfera máxima en el FCS; b) Presión óptima  $P^*$ .

efecto de las fuerzas inerciales y gravitacionales sobre la presión es mínimo cuando se minimiza la distancia entre el centro de masa  $CM$  del objeto y el centroide  $C$  del polígono de contacto (para objetos 2D) o poliedro de contacto (para objetos 3D) (Figura 3b). Así, esta distancia se usa como medida de calidad para objetos 2D (Chinellato *et al.*, 2005) y para objetos 3D (Ponce *et al.*, 1997; Ding *et al.*, 2001):

$$Q = \text{Dist}(CM, C) \quad (15)$$

**3.2.4. Margen de incertidumbre en la posición de los dedos.** Se denomina espacio de contacto o de presiones al espacio definido por los parámetros que representan los posibles puntos de contacto de los dedos sobre el objeto, y se denomina espacio de cierre de fuerza, FCS, al subconjunto del espacio de contacto en donde se obtienen presiones con cierre de fuerza. Se han planteado diferentes métodos para el cálculo del espacio de cierre de fuerza para objetos 2D en diferentes condiciones (Liu, 2000; Li *et al.*, 2002; Cornellà and Suárez, 2005b), y se ha establecido que el FCS es la unión de un conjunto de poliedros convexos  $CP_i$ .

Si se considera la existencia de incertidumbre en las posiciones reales de los dedos, mientras más lejos se ubiquen estos de la frontera del FCS más segura será la presión. Con este criterio, dada una presión representada por un punto  $P$  en el espacio de contacto, se ha propuesto como medida de calidad el radio de la hiperesfera más grande centrada en  $P$  y totalmente contenida en uno de los poliedros convexos  $CP_i$  que forman el FCS. El índice de calidad está dado por

$$Q = \min_{P_j \in \partial CP_i} \|P - P_j\| \quad (16)$$

en donde  $\partial CP_i$  es la frontera de  $CP_i$ . La Figura 4 ilustra un ejemplo para tres dedos, y por tanto para espacios tridimensionales de contacto y de cierre de fuerza; la presión óptima  $P^*$  determina la ubicación  $l_1^*$ ,  $l_2^*$  y  $l_3^*$  de los dedos sobre el objeto.

Esta medida no ha sido aplicada a objetos 3D debido a la complejidad del espacio de presiones resultante (nótese que se requieren dos parámetros para fijar la posición de cada dedo sobre la superficie del objeto).

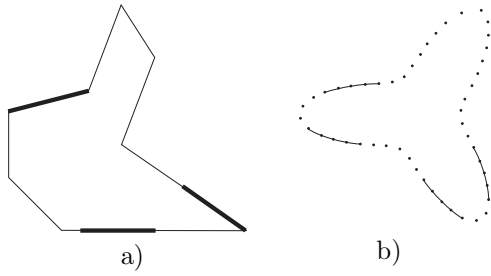


Figura 5. Ejemplos de regiones de contacto independientes: a) Presión de un objeto poligonal con tres dedos; b) Presión de un objeto no poligonal discreto con cuatro dedos.

### 3.2.5. Regiones de contactos independientes.

Otro enfoque que toma en cuenta la incertidumbre en el posicionamiento de los dedos se basa en el cálculo de regiones sobre la frontera del objeto tales que si cada dedo se posiciona dentro de una de esas regiones se obtiene una presión con cierre de fuerza, independientemente de los puntos de contacto exactos. Estas regiones, denominadas regiones de contactos independientes (Nguyen, 1988), definen un paralelepípedo alineado con los ejes de referencia en el espacio de presiones, y totalmente contenido dentro del espacio de cierre de fuerza. A mayor tamaño de las regiones (es decir, de los lados del paralelepípedo) mayor es el rango de posicionamiento de los dedos. Así, la calidad se asocia con el tamaño  $L_{\text{mín}}$  de la región de contacto independiente más pequeña (Ponce and Faverjon, 1995), es decir,

$$Q = L_{\text{mín}} \quad (17)$$

Este criterio se desarrolló inicialmente para objetos poligonales, y luego fue aplicado a objetos 2D no poligonales sujetos con dos dedos (Stam *et al.*, 1992), y objetos 2D no poligonales con contornos representados mediante un número finito de puntos (Cornellà and Suárez, 2005a), en este caso asociando la calidad con el número de puntos contenidos en las regiones de contactos independientes. La Figura 5 ilustra dos ejemplos de estas regiones.

La presión admite un mayor error en la ubicación de los dedos si estos se posicionan nominalmente en el centro de cada región de contacto independiente. Así, se plantea otra medida de calidad para objetos poliédricos, denominada índice de incertidumbre en la presión o margen de presión (Kim *et al.*, 2001; Chinellato *et al.*, 2003), dada por la suma de las distancias entre cada uno de los puntos reales de contacto  $(x_i, y_i, z_i)$  y el centro de la región de contacto independiente correspondiente  $(x_{i0}, y_{i0}, z_{i0})$ , es decir, el índice que se debe minimizar es,

$$Q = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \sqrt{(x_i - x_{i0})^2 + (y_i - y_{i0})^2 + (z_i - z_{i0})^2} \right) \quad (18)$$

### 3.3 Medidas considerando limitaciones en las fuerzas de los dedos

Los subgrupos previos de medidas de calidad no consideran ningún límite en la magnitud de las fuerzas aplicadas por los dedos, por lo que aunque las presiones pueden resistir perturbaciones externas en cualquier dirección, no se tiene ninguna información sobre la magnitud de la perturbación que puede ser resistida, y en algunos casos los dedos tendrían que aplicar fuerzas extremadamente grandes para resistir perturbaciones pequeñas. La calidad de una presión puede indicar también el módulo de la fuerza generalizada de perturbación que la presión puede resistir cuando se consideran límites en las fuerzas que pueden aplicar los dedos. Las medidas que consideran este aspecto se incluyen en esta subsección.

**3.3.1. Mínima perturbación resistida.** Antes de presentar esta medida de calidad, es necesario describir las restricciones que normalmente condicionan las fuerzas  $\mathbf{f}_i$  ejercidas por los dedos:

- Existe una fuente de potencia independiente para cada dedo, entonces el módulo de la fuerza aplicada por cada dedo tiene una cota máxima independiente. Sin pérdida de generalidad, para simplificar la formulación se asume que todas las fuerzas tienen el mismo límite y que está normalizado en 1, esto es  $\|\mathbf{f}_i\| \leq 1$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Considerando que el cono de fricción en el punto de contacto  $\mathbf{p}_i$  se aproxima mediante una pirámide de  $s$  lados,  $\mathbf{f}_i$  puede expresarse como la combinación lineal positiva de fuerzas  $\mathbf{f}_{i,j}$ ,  $j = 1, \dots, s$  que actúan a lo largo de las aristas de la pirámide (denominadas fuerzas primitivas), y la fuerza generalizada  $\boldsymbol{\omega}_i$  producida por  $\mathbf{f}_i$  en  $\mathbf{p}_i$  (Subsección 2.2) se puede expresar como una combinación lineal positiva de las fuerzas generalizadas primitivas  $\boldsymbol{\omega}_{i,j}$  producidas por  $\mathbf{f}_{i,j}$ . Así,  $n$  dedos producen una fuerza generalizada resultante sobre el objeto dada por

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\omega}_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^s \alpha_{i,j} \boldsymbol{\omega}_{i,j} \quad (19)$$

$$\text{con } \alpha_{i,j} \geq 0, \sum_{j=1}^s \alpha_{i,j} \leq 1$$

Considerando las posibles variaciones de  $\alpha_{i,j}$ , el conjunto  $\mathcal{P}$  de posibles fuerzas generalizadas resultantes sobre el objeto es el casco convexo de la suma de Minkowski de las fuerzas generalizadas primitivas  $\boldsymbol{\omega}_{i,j}$ :

$$\mathcal{P} = \text{CascoConvexo} \left( \bigoplus_{i=1}^n \{\boldsymbol{\omega}_{i,1}, \dots, \boldsymbol{\omega}_{i,s}\} \right) \quad (20)$$

- Existe una fuente limitada de potencia, común para todos los dedos, por lo que la suma



de los módulos de las fuerzas aplicadas por los dedos está limitada. Asumiendo de nuevo un límite normalizado en 1, la restricción es  $\sum_{i=1}^n \|\mathbf{f}_i\| \leq 1$ .

Linealizando el cono de fricción como en el caso anterior, la fuerza generalizada resultante sobre el objeto es

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^s \alpha_{i,j} \boldsymbol{\omega}_{i,j} \quad (21)$$

$$\text{con } \alpha_{i,j} \geq 0, \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^s \alpha_{i,j} \leq 1$$

y el conjunto  $\mathcal{P}$  de todas las posibles fuerzas generalizadas resultantes sobre el objeto es:

$$\mathcal{P} = \text{CascoConvexo} \left( \bigcup_{i=1}^n \{\boldsymbol{\omega}_{i,1}, \dots, \boldsymbol{\omega}_{i,s}\} \right) \quad (22)$$

El conjunto  $\mathcal{P}$  es también conocido como espacio de fuerzas generalizadas de la presión (*Grasp Wrench Space*) (Pollard, 1996; Borst *et al.*, 1999).

Existen otras propuestas de restricciones para las fuerzas de los dedos (Mishra, 1995); sin embargo, las interpretaciones físicas no son tan evidentes como en los casos anteriores, y no han sido ampliamente utilizadas.

Considerando las restricciones de fuerza, se ha propuesto como medida de calidad el módulo de la máxima fuerza generalizada de perturbación que la presión puede resistir independientemente de su dirección; geoméricamente, la calidad es equivalente al radio de la máxima bola centrada en el origen del espacio de fuerzas generalizadas y completamente contenida en  $\mathcal{P}$  (Ferrari and Canny, 1992; Kirkpatrick *et al.*, 1992). La medida de calidad se expresa como

$$Q = \min_{\boldsymbol{\omega} \in \partial \mathcal{P}} \|\boldsymbol{\omega}\| \quad (23)$$

donde  $\partial \mathcal{P}$  es la frontera de  $\mathcal{P}$ . Esta medida de calidad, también conocida como el criterio de la “bola máxima”, es una de las más utilizadas; su fundamentación matemática se ha estudiado en profundidad tanto sin fricción (Mishra *et al.*, 1987) como con fricción (Teichmann and Mishra, 1997), y la medida se ha empleado en diferentes trabajos (Borst *et al.*, 2003; Cornellà and Suárez, 2003; Miller and Allen, 2004).

Una presión óptima bajo una restricción de fuerza no es necesariamente óptima bajo otra restricción; la Figura 6 ilustra cualitativamente en un ejemplo bidimensional el conjunto de posibles fuerzas generalizadas y las calidades resultantes para las restricciones sobre las fuerzas de los dedos descritas en las ecuaciones (19) y (21).

### 3.3.2. Variaciones del criterio de la bola máxima.

La medida de calidad dada por la ecuación (23)

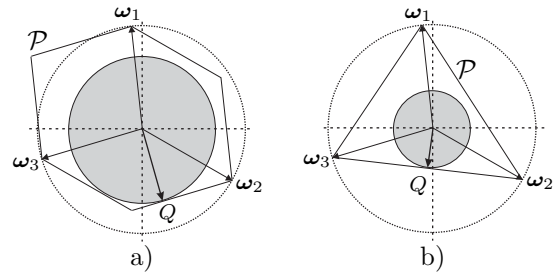


Figura 6. Ejemplo bidimensional cualitativo de la calidad de presión usando tres dedos y: a) un límite en el módulo de cada fuerza; b) un límite en la suma de los módulos de las fuerzas aplicadas.

fue planteada usando la métrica  $L_2$ ; algunos trabajos (Mishra, 1995) proponen el uso de otras métricas, como  $L_1$  o  $L_\infty$ , pero no se han presentado en la literatura del área implementaciones o discusiones detalladas de su uso.

El radio de la bola máxima inscrita en  $\mathcal{P}$  depende de la selección del origen del sistema de referencia usado para calcular los pares (frecuentemente el *CM* del objeto), y una presión óptima con respecto a un sistema de referencia puede no ser óptima respecto a otro. Se han propuesto diferentes alternativas para evitar este efecto, por ejemplo el uso como medida de calidad del radio de la bola máxima con respecto a todas las posibles selecciones de sistemas de referencia (Teichmann, 1996); sin embargo, esta medida no ha sido ampliamente considerada debido a su alto coste computacional. Otra medida de calidad relacionada es el volumen de  $\mathcal{P}$  (Miller and Allen, 1999), que es constante independientemente del sistema de referencia usado para calcular los pares (pero a igualdad de volúmenes una presión podría resistir mucha menos fuerza que otra en una cierta dirección); la medida de calidad se expresa como

$$Q = \text{Volumen}(\mathcal{P}) \quad (24)$$

Para evitar la definición de una métrica conjunta para fuerzas y pares en el espacio de fuerzas generalizadas (el factor  $\lambda$  introducido en la Subsección 2.2), se ha propuesto el siguiente criterio de optimalidad (Mirtich and Canny, 1994): primero se calculan las presiones que mejor resisten las fuerzas puras, y luego se selecciona entre estas la presión que resiste mejor los pares puros. Las medidas de calidad en cada paso son

$$Q^f = \min_{\mathbf{f} \in \partial \mathcal{P}^f} \|\mathbf{f}\| \quad (25)$$

$$Q^\tau = \min_{\boldsymbol{\tau} \in \partial \mathcal{P}^\tau} \|\boldsymbol{\tau}\| \quad (26)$$

en donde  $\partial \mathcal{P}^f$  y  $\partial \mathcal{P}^\tau$  son respectivamente las fronteras de las posibles fuerzas y pares resultantes que los dedos pueden generar sobre el objeto.

**3.3.3. Componentes de las fuerzas en los puntos de contacto.** La suma de las componentes normales de las fuerzas aplicadas sobre el objeto es indicativa de la eficiencia de las mismas en la prensión. Así, se define otro índice de calidad como el inverso de la suma de los módulos de las componentes normales de las fuerzas aplicadas requeridas para compensar una perturbación esperada  $\omega_0$ , siendo el propio peso la principal perturbación considerada (Pollard, 2004; Liu *et al.*, 2004b); cuanto menor es este índice mejor es la prensión. A diferencia del criterio de la bola máxima, esta medida fija de antemano la perturbación externa que se debe resistir, y después considera las fuerzas requeridas para hacerlo. El índice de calidad es

$$Q = \min_{G\mathbf{f}=\omega_0, M>0} \frac{1}{\sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i^n} \quad (27)$$

en donde  $G$  es la matriz de prensión,  $\mathbf{f}_i^n$  es la componente normal de la fuerza  $\mathbf{f}_i$ ,  $M$  es una matriz cuyos elementos dependen de las componentes de las fuerzas de contacto (Buss *et al.*, 1995; Helmke *et al.*, 2002), y  $M > 0$  indica que las fuerzas de contacto satisfacen las restricciones de positividad y de fricción (Subsección 2.1).

Otro enfoque toma en cuenta que si las fuerzas aplicadas en cada punto de contacto en ausencia de perturbaciones están cercanas a la dirección normal a la frontera del objeto, las fuerzas aplicadas pueden variar en un mayor rango de direcciones para contrarrestar posibles perturbaciones externas, mientras que si las fuerzas están cerca del límite del cono de fricción los dedos podrían deslizarse fácilmente al intentar contrarrestar las perturbaciones. Ese efecto se considera con el siguiente índice (Liu *et al.*, 2004b),

$$Q = \min_{G\mathbf{f}=\omega_0, M>0} \log \det M^{-1} \quad (28)$$

donde  $G$ ,  $\mathbf{f}$  y  $M$  son respectivamente la matriz de prensión, el vector de fuerza aplicada y la matriz que garantiza el cumplimiento de las restricciones de positividad y fricción. Este índice tiende al infinito cuando cualquier fuerza de contacto se aproxima a la frontera del cono de fricción (Han *et al.*, 2000); así, una prensión es mejor mientras más pequeño sea  $Q$ .

**3.3.4. Medidas orientadas a la tarea.** La prensión de un objeto se realiza, en general, para cumplir con una tarea determinada. Si existe una descripción detallada de dicha tarea, una medida de calidad puede cuantificar la adecuación de la prensión a su ejecución.

La tarea se caracteriza mediante un conjunto de fuerzas generalizadas que deben aplicarse sobre el objeto para lograr un objetivo determinado, y por un conjunto de fuerzas generalizadas de perturbación que el objeto debe resistir mientras

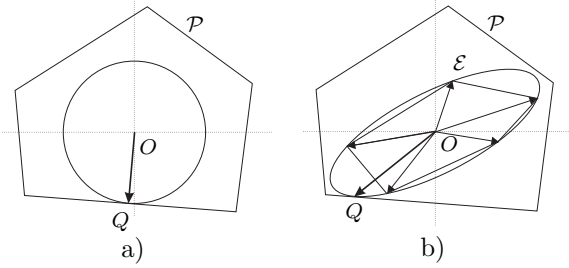


Figura 7. Ejemplos de medidas de calidad para las mismas fuerzas aplicadas: a) Mínima perturbación resistida; b) Medida de calidad orientada a la tarea.

está siendo manipulado. Todas estas fuerzas generalizadas forman un politopo de la tarea, que se aproxima mediante un conjunto convexo  $\mathcal{E}$  centrado en el origen, que puede ser un elipsoide (Li and Sastry, 1988) o directamente un politopo convexo (Zhu *et al.*, 2001). La medida de calidad es el factor de escala  $\rho$  requerido para obtener el conjunto  $\rho\mathcal{E}$  más grande y totalmente contenido en  $\mathcal{P}$  (a mayor  $\rho$  se obtiene una mejor prensión) (Borst *et al.*, 2004; Haschke *et al.*, 2005)

$$Q = \max_{\rho\mathcal{E} \subset \mathcal{P}, \rho \geq 0} \rho \quad (29)$$

La Figura 7 muestra una comparación de esta medida, considerando  $\mathcal{E}$  como un elipsoide, con el radio de la bola máxima inscrita en  $\mathcal{P}$ . Mientras la bola asume que la probabilidad para cada dirección de perturbación es la misma, el elipsoide toma en cuenta las direcciones de perturbación de mayor exigencia en la tarea requerida.

### 3.4 Ejemplos

Con el fin de facilitar la interpretación intuitiva de los resultados, las medidas de calidad aquí presentadas se han implementado y aplicado a un objeto sencillo, una pieza rectangular de 4 por 2 cm sujeta mediante cuatro dedos sin fricción (salvo casos particulares indicados explícitamente). El contorno del objeto se ha discretizado en 64 puntos; se asume por simplicidad que se puede hacer fuerza mediante un contacto puntual en la dirección normal a un lado hasta en los vértices del mismo (en la práctica se debe dejar una distancia de seguridad). Se obtienen así 53361 diferentes combinaciones de prensión, de las cuales 23100 son prensiones con cierre de fuerza. Para estas prensiones se han calculado las medidas de calidad cuyos resultados se detallan a continuación.

#### 3.4.1. Medidas de calidad basadas en propiedades algebraicas de la matriz de prensión $G$

- $Q_1$ -Valor singular mínimo de  $G$  (Sec. 3.1.1): se logran 74 diferentes prensiones óptimas que cubren diferentes posibilidades de prensión; una de ellas se presenta en la Fig. 8a.



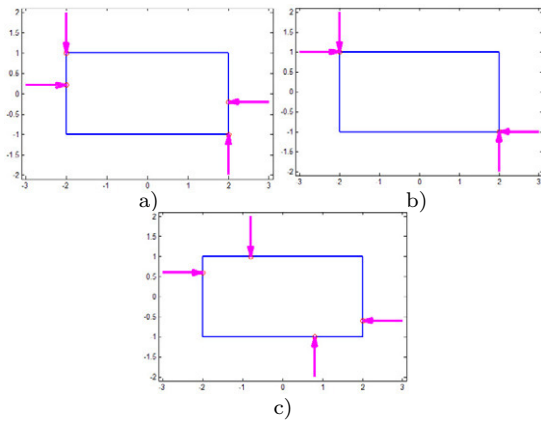


Figura 8. Ejemplos de presiones óptimas según :  
 a) Valor singular mínimo de  $G$ ; b) Volumen del elipsoide en el espacio de fuerzas generalizadas; c) Índice de isotropía de la presión.

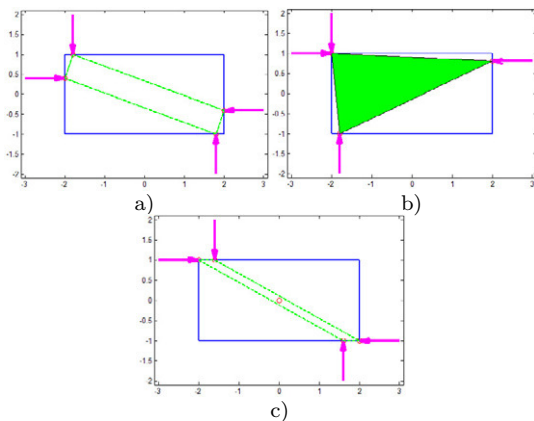


Figura 9. Ejemplos de presiones óptimas según:  
 a) Forma del polígono de presión; b) Área del polígono de presión; c) Distancia entre el centroide del polígono de contacto y el  $CM$  del objeto.

- $Q_2$ -Volumen del elipsoide en el espacio de fuerzas generalizadas (Sec. 3.1.2): hay dos presiones óptimas con localizaciones simétricas de los puntos de contacto sobre el objeto; una de ellas se presenta en la Fig. 8b.
- $Q_3$ -Índice de isotropía de la presión (Sec. 3.1.3): hay cuatro presiones óptimas en las que se logra el valor máximo absoluto de la medida de calidad; una de estas presiones se presenta en la Fig. 8c.

### 3.4.2. Medidas basadas en relaciones geométricas

- $Q_4$ -Forma del polígono de presión (Sec. 3.2.1): hay dos presiones óptimas simétricas sobre el objeto; una de ellas se muestra en la Fig. 9a.
- $Q_5$ -Área del polígono de presión (Sec. 3.2.2): se logran 400 diferentes presiones óptimas, con una gran variedad de posiciones relativas de los puntos de contacto sobre el objeto; una de ellas se muestra en la Fig. 9b.

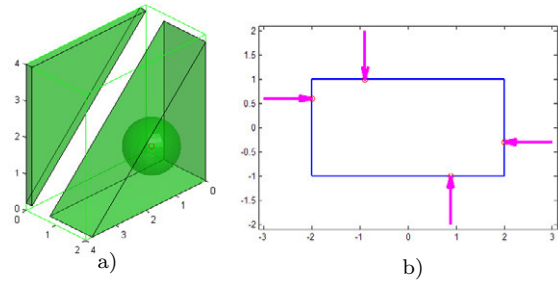


Figura 10. Margen de incertidumbre en la posición de los dedos: a) Espacio de contactos y FCS (sombreado); b) Presión óptima.

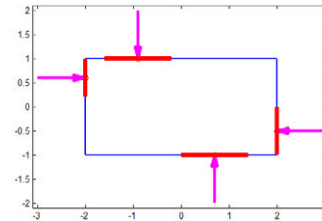


Figura 11. Regiones de contactos independientes óptimas y presión óptima según el índice de incertidumbre de la presión.

- $Q_6$ -Distancia entre el centroide del polígono de contacto y el  $CM$  del objeto (Sec. 3.2.3): hay 100 presiones óptimas en las que se alcanza el mínimo posible para esta medida de calidad,  $Q = 0$ ; una de estas presiones se muestra en la Fig. 9c.
- $Q_7$ -Margen de incertidumbre en la posición de los dedos (Sec. 3.2.4): la Fig. 10a muestra el espacio de contactos y el espacio de cierre de fuerza (FCS) para las presiones obtenidas cuando se ha fijado un punto de contacto en el rectángulo (en este caso, el contacto del lado izquierdo está fijo a fin de poder hacer una representación tridimensional que ilustre el concepto); la hipersfera máxima inscrita en el FCS determina la presión óptima, mostrada en la Fig. 10b.
- $Q_8$ -Tamaño mínimo de las regiones de contacto independientes (Sec. 3.2.5): se pueden obtener 4608 óptimos, de los que se muestra uno en la Fig. 11, donde además se muestra la presión ideal ( $Q = 0$ ) para estas regiones de contacto independientes según el índice de incertidumbre de la presión, esto es, la presión en la que los contactos se encuentran ubicados en el centro de su respectiva región.

### 3.4.3. Medidas considerando limitaciones en la fuerza de los dedos

- $Q_9$  - Máxima-mínima perturbación resistida (Sec. 3.3.1): considerando que existe una fuente limitada de potencia para todos los dedos ( $\sum_{i=1}^n \|\mathbf{f}_i\| \leq 1$ ) hay dos presiones óptimas simétricas; una de ellas se muestra en la Fig. 12a

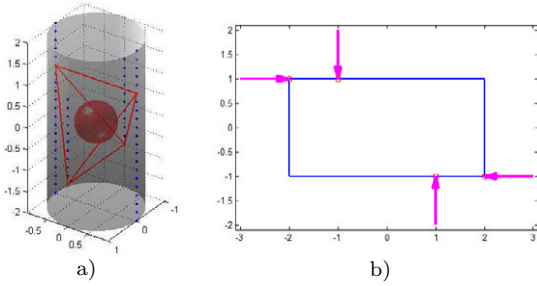


Figura 12. Máxima-mínima perturbación resistida: a) En el espacio de fuerzas generalizadas; b) Presión óptima.

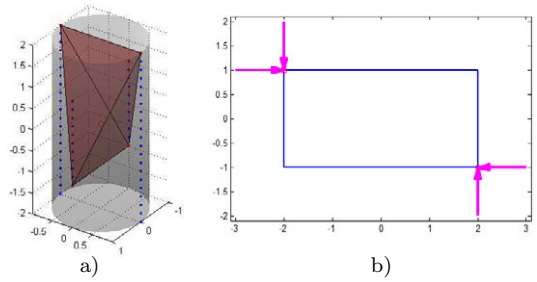


Figura 13. Volumen de  $\mathcal{P}$ : a) En el espacio de fuerzas generalizadas; b) Presión óptima.

en el espacio de fuerzas generalizadas y en la Fig. 12b sobre el objeto.

- $Q_{10}$ -Volumen del conjunto  $\mathcal{P}$  de todas las posibles fuerzas generalizadas sobre el objeto (Sec. 3.3.2): existen dos presiones óptimas simétricas, de las que se muestra una en la Fig. 13a en el espacio de fuerzas generalizadas y en la Fig. 13b sobre el objeto.
- $Q_{11}$ -Componentes normales de las fuerzas en los puntos de contacto (Sec. 3.3.3): la Fig. 14 ilustra una presión con dos dedos con fricción; se muestra un ejemplo de presión óptima con las fuerzas aplicadas centradas en su cono de fricción, y un caso de baja calidad con las fuerzas próximas a los límites del cono de fricción.
- $Q_{12}$ -Medidas orientadas a la tarea (Sec. 3.3.4): supóngase una tarea que puede producir las perturbaciones mostradas en la Fig. 15a. Se obtienen dos presiones óptimas simétricas, de las que se muestra una en la Fig. 15b en el espacio de fuerzas generalizadas y en la Fig. 15c sobre el objeto.

La Tabla 2 presenta una comparación numérica de los valores de calidad para las presiones óptimas según los criterios anteriormente presentados. Se destaca que una presión óptima según un criterio no necesariamente es óptima según otro; además, algunos de los criterios presentados conducen a varias posiciones óptimas de los dedos sobre el objeto, lo que puede hacer variar la relación de valores en cada fila.

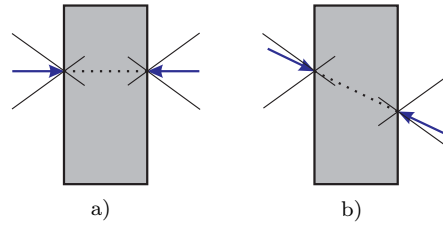


Figura 14. Componentes normales de las fuerzas en los puntos de contacto: a) Una presión óptima; b) Una presión de baja calidad.

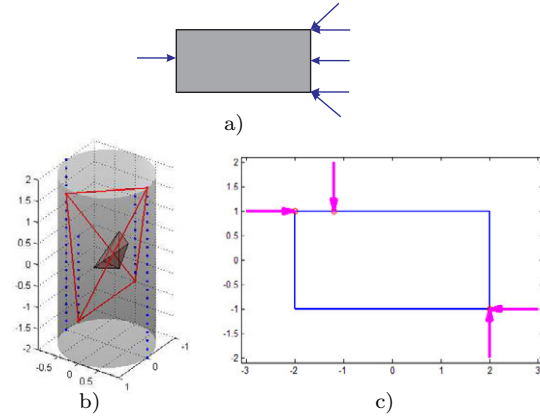


Figura 15. Medidas orientadas a la tarea: a) Fuerzas de reacción esperadas en un posible contacto; b) Presión óptima en el espacio de fuerzas generalizadas; c) Presión óptima sobre el objeto.

#### 4. MEDIDAS DE CALIDAD RELACIONADAS CON LA CONFIGURACIÓN DEL ELEMENTO PRENSOR

Este segundo grupo de medidas de calidad contempla aquellas en las que se considera la configuración del elemento prensor en la estimación de calidad de la presión. Algunas de estas medidas son similares a las presentadas en la Subsección 3.1, pero ahora considerando el Jacobiano mano-objeto  $H$  (Subsección 2.2) para realizar la cuantificación de la calidad (Shimoga, 1996).

##### 4.1 Distancia a configuraciones singulares

Para mantener los robots manipuladores redundantes alejados de las configuraciones singulares se buscan configuraciones que maximicen el valor singular más pequeño  $\sigma_{min}$  del Jacobiano del manipulador (Klein and Blaho, 1987). El mismo concepto se aplica a las presiones con manos articuladas usando para ello el Jacobiano mano-objeto  $H$ , que en una configuración singular tendrá al menos un valor singular igual a cero. Así,

$$Q = \sigma_{min}(H) \quad (30)$$

La maximización de esta medida equivale a escoger la presión con la configuración más alejada de una configuración singular.

Tabla 2. Comparación de calidades de prensiones óptimas según diferentes criterios.

	$Q_1^\dagger$	$Q_2^\dagger$	$Q_3^\dagger$	$Q_4^\ddagger$	$Q_5^\dagger$	$Q_6^\ddagger$	$Q_7^\dagger$	$Q_8^\dagger$	$Q_9^\dagger$	$Q_{10}^\dagger$	$Q_{12}^\dagger$
Prensión óptima según $Q_1$ (Fig. 8a)	1.4142	32.32	0.4975	0.1708	3.2	0	0.5	5	0.0828	1.4667	0.0884
Prensión óptima según $Q_2$ (Fig. 8b)	1.4142	40	0.4472	1	0	0	0.9	5	0.3162	2	0.3536
Prensión óptima según $Q_3$ (Fig. 8c)	1.4142	8	1	0.4647	3.04	0	0.7	5	0.3487	0.9333	0.3333
Prensión óptima según $Q_4$ (Fig. 9a)	1.4142	27.2	0.5423	0.0199	2.56	0	0.6	5	0.1655	1.4667	0.1768
Prensión óptima según $Q_5$ (Fig. 9b)	0.0858	0.16	0.0260	0.7262	3.98	1.0512	0.9	1	0.0401	0.1333	0.0786
Prensión óptima según $Q_6$ (Fig. 9c)	1.4142	28.48	0.53	0.6772	0.8	0	0.9	5	0.3590	1.7333	0.3928
Prensión óptima según $Q_7$ (Fig. 10b)	1.1871	6.4	0.7878	0.4163	3.36	0.1	0.7	5	0.254	0.8	0.2357
Prensión óptima según $Q_8$ (Fig. 11)	1.3867	11.68	0.7957	0.3932	2.9	0.0707	0.7	5	0.2532	1.0667	0.2525
Prensión óptima según $Q_9$ (Fig. 12b)	1.4142	16	0.7071	0.6257	2	0	0.9	5	0.4472	1.3333	0.3333
Prensión óptima según $Q_{10}$ (Fig. 13b)	1.4142	40	0.4472	1	0	0	0.9	5	0.3162	2	0.3536
Prensión óptima según $Q_{12}$ (Fig. 15c)	1.3729	28.48	0.4995	0.8373	0.8	0.2	0.9	5	0.3162	1.7333	0.4419

Criterios:  $\dagger$ a maximizar,  $\ddagger$ a minimizar

#### 4.2 Volumen del elipsoide de manipulabilidad

La medida  $\sigma_{\min}(H)$  considera solamente un valor singular de  $H$ , que puede ser similar para dos configuraciones diferentes de presión. Para ponderar todos los valores singulares de  $H$  se usa el volumen del elipsoide de manipulabilidad (Subsección 2.3) como medida de calidad (Yoshikawa, 1985). Sean  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$  los valores singulares de  $H$ ; la calidad de presión se obtiene mediante

$$Q = \sqrt{\det(HH^T)} = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_r \quad (31)$$

Así pues, la calidad es el producto de todos los valores singulares, y la maximización del determinante de  $HH^T$  maximiza el volumen del elipsoide. Físicamente esto significa que las mismas velocidades en las articulaciones de los dedos en dos configuraciones diferentes de presión producen una mayor velocidad del objeto en la configuración con mayor calidad.

#### 4.3 Uniformidad de transformación

La transformación entre el dominio de velocidades de las articulaciones de los dedos y el dominio de velocidades del objeto es uniforme cuando la contribución de las velocidades de cada articulación es igual en todas las componentes de la velocidad del objeto; esto significa que la mano puede mover el objeto en cualquier dirección con la misma ganancia, lo que indica una buena capacidad de manipulación. El número de condición  $n_c$  del Jacobiano de un dedo es una medida de esta capacidad (Salisbury and Craig, 1982). Este concepto se usa para medir la calidad de una presión,

considerando el número de condición de la matriz  $H$  como una medida de la manipulabilidad del objeto aprehendido. El número de condición de  $H$  se calcula a partir de sus valores singulares máximo y mínimo ( $\sigma_{\max}$  y  $\sigma_{\min}$ ):

$$Q = n_c(H) = \frac{\sigma_{\max}(H)}{\sigma_{\min}(H)} \quad (32)$$

Cuando  $n_c(H) = 1$  las columnas de  $H$  son vectores ortogonales entre sí y tienen igual magnitud, lo que indica una transformación uniforme y una calidad máxima de la presión.

#### 4.4 Posiciones de las articulaciones de los dedos

Un criterio útil para seleccionar configuraciones en robots manipuladores redundantes consiste en buscar que las articulaciones del robot estén lo más lejos posible de sus límites físicos, esto es, se eligen de forma preferente configuraciones con las articulaciones lo más centradas posible en su rango de movimientos (Liegeois, 1977). La misma idea se aplica en la selección de configuraciones en manos mecánicas; el índice usado para cuantificar la desviación en los ángulos de articulaciones es

$$Q = \sum_{i=1}^{nm} (\theta_i - \theta_{0i})^2 \quad (33)$$

donde  $\theta_i$  y  $\theta_{0i}$  son el ángulo real y el ángulo de referencia cero de la articulación  $i$ , respectivamente (la formulación se simplifica si  $\theta_{0i} = 0$ ). La medida (33) puede ser redefinida ponderando adecuadamente los diferentes rangos de movimiento de cada articulación:

$$Q = \sum_{i=1}^{nm} \left( \frac{\theta_i - \theta_{0i}}{\theta_{\max i} - \theta_{\min i}} \right)^2 \quad (34)$$

#### 4.5 Índice de compatibilidad de tareas

Este índice considera los requisitos de la tarea para medir la calidad de la prensión (Chiu, 1988); si hay direcciones probables de perturbaciones sobre el objeto, la prensión debe tratar de asegurar la máxima relación de transformación en esas direcciones. Considérese un vector unitario  $\hat{\omega}_i$  en el espacio de fuerzas generalizadas con la dirección de un requisito de fuerza, y la distancia  $\alpha_i$  desde el origen hasta la superficie del elipsoide de fuerza en la dirección  $\hat{\omega}_i$ . Así,  $\alpha_i \hat{\omega}_i$  representa un punto sobre el elipsoide de fuerza (Subsección 2.3), y por lo tanto satisface la siguiente relación:

$$(\alpha_i \hat{\omega}_i)^T (HH^T) (\alpha_i \hat{\omega}_i) = 1 \quad (35)$$

de donde

$$\alpha_i = \left[ \hat{\omega}_i^T (HH^T) \hat{\omega}_i \right]^{-1/2} \quad (36)$$

De forma similar, considérese un vector unitario  $\hat{x}_j$  en la dirección de un requisito de velocidad, y la distancia  $\beta_j$  desde el origen hasta la superficie del elipsoide de velocidad en la dirección  $\hat{x}_j$ , entonces  $\beta_j \hat{x}_j$  satisface la siguiente relación:

$$\left( \beta_j \hat{x}_j \right)^T (HH^T)^{-1} \left( \beta_j \hat{x}_j \right) = 1 \quad (37)$$

de donde

$$\beta_j = \left[ \hat{x}_j^T (HH^T)^{-1} \hat{x}_j \right]^{-1/2} \quad (38)$$

Con estos elementos, el índice de compatibilidad de tareas se define como

$$Q = \sum_{i=1}^s \gamma_i \alpha_i^{\pm 2} + \sum_{j=s+1}^z \gamma_j \beta_j^{\pm 2} \quad (39)$$

de donde

$$Q = \sum_{i=1}^s \gamma_i \left[ \hat{\omega}_i^T (HH^T) \hat{\omega}_i \right]^{\pm 1} + \sum_{j=s+1}^z \gamma_j \left[ \hat{x}_j^T (HH^T)^{-1} \hat{x}_j \right]^{\pm 1} \quad (40)$$

en donde  $s$  es el número de direcciones en las que se especifican requerimientos de fuerza,  $z - s$  es el número de direcciones en que se especifican requerimientos de velocidad, el exponente  $+1$  es usado en las direcciones en que se desea que la magnitud de la velocidad o la fuerza sea alta, mientras que el exponente  $-1$  se usa en las direcciones en que se desea que el control de velocidad o la fuerza sea muy preciso, y  $\gamma_i, \gamma_j$  son factores de peso que valoran la importancia relativa de cada requisito de magnitud y precisión en las respectivas direcciones. La configuración que maximiza este índice permite aplicar velocidades y fuerzas en cada una de las direcciones deseadas de forma acorde con los requerimientos para la prensión.

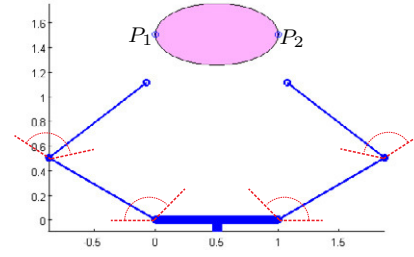


Figura 16. Elemento prensor y objeto usados para la implementación de las medidas de calidad relacionadas con la configuración del elemento prensor.

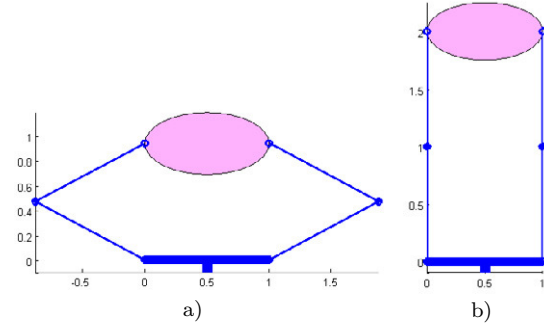


Figura 17. Distancia a configuraciones singulares: a) Configuración óptima; b) Configuración singular.

#### 4.6 Ejemplos

Las medidas de calidad presentadas en esta sección se han implementado para un elemento prensor con dos dedos, cada uno con dos grados de libertad, que debe sujetar un elipsoide de 1 por 0.5 cm por los extremos de su eje mayor. La base del elemento prensor y cada uno de los dedos tienen una longitud de 1 cm; además, cada articulación tiene una amplitud de movimiento de  $135^\circ$ , según se muestra en la Fig. 16. Se han utilizado 12 posiciones diferentes para cada articulación del dedo izquierdo, y para estas posiciones se ha calculado la correspondiente configuración del dedo derecho que permite la prensión en los puntos de contacto predeterminados sobre el objeto. Se obtienen así 132 posiciones válidas en las que ninguna articulación está fuera de su rango de movimiento. Para estas configuraciones se han calculado las siguientes medidas de calidad:

- *Distancia a configuraciones singulares (Sec. 4.1):* la configuración óptima del elemento prensor se muestra en la Fig. 17a. En la Fig. 17b se muestra una configuración singular, en la que el valor singular mínimo es cero (la peor calidad posible).
- *Volumen del elipsoide de manipulabilidad (Sec. 4.2):* hay doce configuraciones óptimas para el elemento prensor, una de ellas mostrada en la Fig. 18. En estas configuraciones se obtiene una alta manipulabilidad del objeto (en cuanto a movimientos infinitesimales se refiere), sin

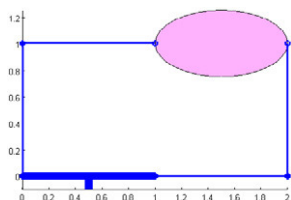


Figura 18. Volumen del elipsoide de manipulabilidad: configuración óptima.

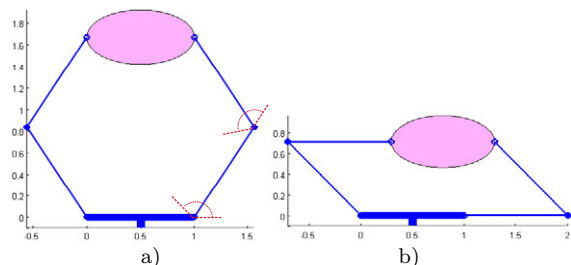


Figura 19. Desviaciones de los ángulos de las articulaciones de los dedos: a) Configuración óptima; b) Configuración de baja calidad.

embargo hay articulaciones en el límite de su rango de movimiento, lo que en general nunca es deseable.

- *Uniformidad de transformación (Sec. 4.3)*: hay dos configuraciones óptimas simétricas del elemento prensor, que coinciden con las halladas en el caso de la distancia a configuraciones singulares (Fig. 17); también aquí se obtiene la peor calidad posible en las configuraciones singulares. Así, para este caso particular el comportamiento de las dos medidas es muy similar.
- *Desviaciones de los ángulos de las articulaciones de los dedos (Sec. 4.4)*: la configuración óptima del elemento prensor se muestra en la Fig. 19a. En la Fig. 19b se muestra una configuración de muy baja calidad. Nótese la diferencia entre esta configuración óptima, que proporciona más “comfort” o rango amplio de posibles movimientos de la mano, y la mostrada en la Fig. 17a, que aleja el elemento prensor de las configuraciones singulares.

## 5. MEDIDAS GLOBALES DE CALIDAD

Los criterios presentados anteriormente miden la calidad de la presión bajo diferentes consideraciones basadas en la ubicación de los puntos de contacto sobre el objeto o en la configuración del elemento prensor. Sin embargo, la presión óptima para algunas tareas puede requerir una combinación de estas consideraciones; por ejemplo, la selección de los puntos de contacto óptimos sobre la superficie del objeto de acuerdo a cualquier criterio de la Sección 3, ignorando la geometría real de la mano, puede conducir a una selección de contactos no alcanzables por la mano; de forma inversa, una configuración óptima de la mano puede generar una presión débil frente a pequeñas

perturbaciones. En estos casos, se puede usar una medida de calidad global obtenida mediante la unión de diversos criterios, combinándolos de forma paralela o serial.

La síntesis de presiones con la aproximación serial usa un criterio de calidad para generar una o varias presiones candidatas, que luego se optimizan usando otro criterio de calidad. Por ejemplo, la optimización con respecto a la configuración de la mano usando la suma ponderada del índice de compatibilidad de tareas dado por la ecuación (40) genera una presión preliminar, que a continuación es usada como una presión inicial en la búsqueda de una presión óptima bajo la medida de la bola máxima dada por la ecuación (23) (Hester *et al.*, 1999).

La aproximación paralela combina diferentes índices de calidad en un solo índice global. El método más simple usa la suma algebraica de los índices de calidad resultantes de cada criterio individual, considerando que todos deben ser maximizados o minimizados; esta aproximación se ha usado para seleccionar presiones óptimas de objetos 2D (Boivin *et al.*, 2004). Una variación de esta aproximación normaliza el resultado de cada criterio dividiéndolo por la diferencia de calidades entre la mejor y la peor presión; este enfoque se ha usado para evaluar presiones de objetos 2D mediante una mano de tres dedos (Chinellato *et al.*, 2003). Dado que se obtienen diferentes medidas globales sumando diferentes índices básicos (Chinellato *et al.*, 2005), se pueden generar índices específicamente adaptados para diferentes aplicaciones prácticas. Otra variación de estos índices globales puede obtenerse realizando una simple suma ponderada de diferentes medidas de calidad.

Kim *et al.* (2004) usan cinco medidas de calidad normalizadas, cubriendo la incertidumbre en la posición de los dedos, la relación máxima de transmisión de fuerza, la isotropía de la presión y su estabilidad. Posteriormente generan un índice de calidad global como el mínimo valor obtenido por todos los criterios.

Otra posibilidad para combinar diferentes criterios de forma paralela es ordenar las presiones de acuerdo a cada una de las medidas, y combinar los listados en una lista global (ordenada tomando en cuenta el lugar que una presión ocupa en cada uno de los listados) para obtener la presión óptima global; sin embargo, esta aproximación tiene un alto costo computacional y no ha dado resultados satisfactorios (Chinellato *et al.*, 2003).

## 6. CONCLUSIONES

En este artículo se han descrito las diferentes medidas de calidad usadas para evaluar presiones,

resumidas en la Tabla 3. Las medidas de calidad se han clasificado en dos grandes grupos: medidas relacionadas con la posición de los puntos de contacto sobre el objeto y medidas relacionadas con la configuración del elemento prensor. El primero de estos grupos es notablemente mayor, lo que ha motivado su división en tres subgrupos de medidas. En el primer subgrupo se encuentran las medidas basadas en propiedades algebraicas de la matriz de presión  $G$ , que tienen una utilidad práctica relativa ya que no consideran ninguna restricción sobre las fuerzas aplicadas en los puntos de contacto. El segundo subgrupo considera las medidas basadas en relaciones geométricas de la presión, orientadas a mejorar la respuesta de la presión ante fuerzas inerciales y a la determinación de regiones de contactos independientes. El tercer subgrupo incluye las medidas que consideran limitaciones en las fuerzas aplicadas por los dedos, entre las que se encuentra una de las medidas de calidad más usadas en síntesis de prensiones (el criterio de la bola máxima y sus variaciones). El segundo grupo de medidas de calidad incluye criterios para obtener configuraciones apropiadas del elemento prensor. Finalmente, dado que una presión debe ser óptima con respecto a ambos grupos de medidas de calidad, se describen diferentes índices globales de calidad obtenidos mediante combinaciones de los anteriores.

Aunque hay algunos trabajos que comparan las prensiones óptimas obtenidas con diversos criterios para diferentes objetos en prensiones bidimensionales (Bone and Du, 2001; Morales *et al.*, 2002; Borst *et al.*, 2004) y tridimensionales (Miller and Allen, 1999), la selección de un criterio apropiado en cada caso real no es siempre trivial. Además, aun conociendo el criterio de calidad a aplicar, la complejidad de los casos reales hace que frecuentemente el costo computacional de cualquier proceso de optimización de una presión sea realmente alto. A fin de dar al lector una idea de carácter más práctico sobre el funcionamiento de cada medida de calidad, se han incluido en las secciones 3.4 y 4.6 ejemplos de aplicación sobre casos sencillos que permitan su interpretación intuitiva. De hecho no se puede recomendar una medida en particular, pues su resultado depende de numerosos aspectos de los elementos implicados, tal como se ha tratado de mostrar en cada caso a lo largo del artículo, y como pone de manifiesto la existencia de propuestas de diferentes combinaciones en la búsqueda de una medida de carácter global. Sin embargo, cabe destacar que las medidas de calidad pueden considerar: a) las posiciones de los puntos de contacto sobre el objeto; b) las direcciones de las fuerzas aplicadas en los puntos de contacto; c) los módulos de las fuerzas aplicadas en los puntos de contacto; y por otra parte d) la configuración de la mano, lo que da una indicación

sobre cuales son las medidas más convenientes en función de las restricciones que se tengan en una aplicación en particular.

Como problemas de investigación abiertos relacionados con las medidas de calidad cabe destacar un análisis de cómo afectan a las diferentes medidas de calidad factores propios de la presión como el número de dedos o el coeficiente de fricción, y la búsqueda de algoritmos eficientes, tanto en términos de complejidad como de coste computacional, para generar las prensiones óptimas según los diferentes criterios.

## REFERENCIAS

- Bekey, G., H. Liu, R. Tomovic and W. Karplus (1993). Knowledge-based control of grasping in robot hands using heuristics from human motor skills. *IEEE Trans. Robotics and Automation* **9**(6), 709–722.
- Bicchi, A. (1995). On the closure properties of robotic grasping. *Int. J. Robotics Research* **14**(4), 319–344.
- Bicchi, A. (2000). Hands for dexterous manipulation and robust grasping: A difficult road towards simplicity. *IEEE Trans. Robotics and Automation* **16**(6), 652–662.
- Bicchi, A. and V. Kumar (2000). Robotic grasping and contact: A review. In: *Proc. IEEE ICRA 2000*. pp. 348–352.
- Boivin, E., I. Sharf and M. Doyon (2004). Optimum grasp of planar and revolute objects with gripper geometry constraints. In: *Proc. IEEE ICRA 2004*. pp. 326–332.
- Bone, G. and Y. Du (2001). Multi-metric comparison of optimal 2D grasp planning algorithms. In: *Proc. IEEE ICRA 2001*. pp. 3061–3066.
- Borst, Ch., M. Fischer and G. Hirzinger (1999). A fast and robust grasp planner for arbitrary 3D objects. In: *Proc. IEEE ICRA 1999*. pp. 1890–1896.
- Borst, Ch., M. Fischer and G. Hirzinger (2003). Grasping the dice by dicing the grasp. In: *Proc. IEEE/RSJ IROS 2003*. pp. 3692–3697.
- Borst, Ch., M. Fischer and G. Hirzinger (2004). Grasp planning: How to choose a suitable task wrench space. In: *Proc. IEEE ICRA 2004*. pp. 319–325.
- Bowers, D. and R. Lumia (2003). Manipulation of unmodeled objects using intelligent grasping schemes. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems* **11**(3), 320–329.
- Brost, R. and K.Y. Goldberg (1996). A complete algorithm for designing planar fixtures using modular components. *IEEE Trans. Robotics and Automation* **12**(1), 31–46.
- Bruyninckx, H., S. Demey and V. Kumar (1998). Generalized stability of compliant grasps. In: *Proc. IEEE ICRA 1998*. pp. 2396–2402.



Tabla 3. Medidas de calidad de la presión.

Grupo	Subgrupo	Índice de calidad	Criterio	Subsección	
Medidas relacionadas con la posición de los puntos de contacto sobre el objeto	Basadas en propiedades algebraicas de $G$	Valor singular mínimo de $G$ -Relación de transmisión de fuerza	Maximizar	3.1.1	
		Volumen del elipsoide en el espacio de fuerzas generalizadas	Maximizar	3.1.2	
		Índice de isotropía de la presión	Maximizar	3.1.3	
	Basadas en relaciones geométricas	Forma del polígono de presión <sup>†</sup>	Minimizar	3.2.1	
		Área del polígono de presión <sup>†</sup>	Maximizar	3.2.2	
		Distancia entre el centroide $C$ y el centro de masa $CM$	Minimizar	3.2.3	
		Margen de incertidumbre en la posición de los dedos <sup>‡</sup>	Maximizar	3.2.4	
		Tamaño mínimo de las regiones de contactos independientes	Maximizar	3.2.5	
		Índice de incertidumbre de la presión	Minimizar	3.2.5	
		Considerando limitaciones en las fuerzas de los dedos	Mínima perturbación resistida	Maximizar	3.3.1
			Mínima perturbación resistida resp. a todos los sist. de ref.	Maximizar	3.3.2
			Volumen del casco convexo $\mathcal{P}$	Maximizar	3.3.2
			Fuerzas generalizadas desacopladas	Maximizar	3.3.2
			Comp. normales de las fuerzas en los puntos de contacto	Minimizar	3.3.3
			Distancia de las fuerzas a los límites del cono de fricción	Maximizar	3.3.3
Medidas orient. a la tarea-mayor conjunto $\mathcal{E}$ inscrito en $\mathcal{P}$	Maximizar	3.3.4			
Medidas relacionadas con la configuración del elemento prensor	Distancia a configuraciones singulares	Maximizar	4.1		
	Volumen del elipsoide de manipulabilidad	Maximizar	4.2		
	Uniformidad de transformación	Minimizar	4.3		
	Desviaciones en los ángulos de las articulaciones de los dedos	Minimizar	4.4		
	Índice de compatibilidad de tareas	Maximizar	4.5		

<sup>†</sup>Aplicable solamente a presiones 2D y 3D planares; <sup>‡</sup>Aplicable solamente a presiones 2D

- Buss, M., H. Hashimoto and J.B. Moore (1995). Grasping force optimization for multi-fingered robot hands. In: *Proc. IEEE ICRA 1995*. pp. 1034–1039.
- Buss, M., H. Hashimoto and J.B. Moore (1996). Dextrous hand grasping force optimization. *IEEE Trans. Robotics and Automation* **12**(3), 406–418.
- Chinellato, E., A. Morales, R. Fisher, and A.P. del Pobil (2005). Visual quality measures for characterizing planar robot grasps. *IEEE Trans. Systems, Man and Cybernetics - Part C: Applications and Reviews* **35**(1), 30–41.
- Chinellato, E., R. Fisher, A. Morales and A.P. del Pobil (2003). Ranking planar grasp configurations for a three-finger hand. In: *Proc. IEEE ICRA 2003*. pp. 1133–1138.
- Chiu, S.L. (1987). Control of redundant manipulators for task compatibility. In: *Proc. IEEE ICRA 1987*. pp. 1718–1724.
- Chiu, S.L. (1988). Task compatibility of manipulator postures. *Int. J. Robotics Research* **7**(5), 13–21.
- Cornellà, J. and R. Suárez (2003). On 2D 4-finger frictionless optimal grasps. In: *Proc. IEEE/RSJ IROS 2003*. pp. 3680–3685.
- Cornellà, J. and R. Suárez (2005a). Determining independent grasp regions on 2D discrete objects. In: *Proc. IEEE/RSJ IROS 2005*. pp. 2936–2941.
- Cornellà, J. and R. Suárez (2005b). Fast and flexible determination of force-closure independent regions to grasp polygonal objects. In: *Proc. IEEE ICRA 2005*. pp. 778–783.
- Cutkosky, M.R. (1989). On grasp choice, grasp models, and the design of hands for manufacturing tasks. *IEEE Trans. Robotics and Automation* **5**(3), 269–279.
- Ding, D., Y.H. Liu and S. Wang (2001). Computation of 3-D form-closure grasps. *IEEE Trans. Robotics and Automation* **17**(4), 515–522.
- Ferrari, C. and J. Canny (1992). Planning optimal grasps. In: *Proc. IEEE ICRA 1992*. pp. 2290–2295.
- Gruppen, R., T. Henderson and I. McCammon (1989). A survey on general purpose manipulation. *Int. J. Robotics Research* **8**(1), 38–62.
- Han, L., J.C. Trinkle and Z.X. Li (2000). Grasp analysis as linear matrix inequality problems. *IEEE Trans. Robotics and Automation* **16**(6), 663–674.
- Haschke, R., J.J. Steil, I. Steuwer and H. Ritter (2005). Task-oriented quality measures for dextrous grasping. In: *Proc. 6th IEEE Int. Conf. Computational Intelligence in Robotics and Automation*. pp. 689–694.
- Helmke, U., K. Huper and J.B. Moore (2002). Quadratically convergent algorithms for optimal dextrous hand grasping. *IEEE Trans. Robotics and Automation* **18**(2), 138–146.
- Hester, R.D., M. Cetin, C. Kapoor and D. Tesar (1999). A criteria-based approach to grasp synthesis. In: *Proc. IEEE ICRA 1999*. pp. 1255–1260.
- Howard, W.S. and V. Kumar (1996). On the stability of grasped objects. *IEEE Trans. Robotics and Automation* **12**(6), 904–917.

- Howe, R.D., I. Kao and M.R. Cutkosky (1988). The sliding of robot fingers under combined torsion and shear loading. In: *Proc. IEEE ICRA 1988*. pp. 103–105.
- Kerr, J. and B. Roth (1986). Analysis of multifingered robot hands. *Int. J. Robotics Research* **4**(4), 3–17.
- Kim, B., B. Yi, S. Oh and I.H. Sung (2004). Non-dimensionalized performance indices based optimal grasping for multi-fingered hands. *Mechatronics* **14**(3), 255–280.
- Kim, B., S. Oh, B. Yi and I.H. Suh (2001). Optimal grasping based on non-dimensionalized performance indices. In: *Proc. IEEE IROS 2001*. pp. 949–956.
- Kirkpatrick, D.G., B. Mishra and C. Yap (1992). Quantitative Steinitz's theorem with applications to multifingered grasping. *Discrete and Computational Geometry* **7**(3), 295–318.
- Klein, C.A. and B.E. Blaho (1987). Dexterity measures for the design and control of kinematically redundant manipulator. *Int. J. Robotics Research* **6**(2), 72–83.
- Leoni, F., M. Guerrini, C. Laschi, D. Taddeucci, P. Dario and A. Starita (1998). Implementing robotic grasping tasks using a biological approach. In: *Proc. IEEE ICRA 1998*. pp. 2274–2280.
- Li, Y., Y. Yu and S. Tsujio (2002). An analytical grasp planning on given object with multifingered hand. In: *Proc. IEEE ICRA 2002*. pp. 3749–3754.
- Li, Z. and S. Sastry (1988). Task-oriented optimal grasping by multifingered robotic hands. *IEEE J. Robotics and Automation* **4**(1), 32–44.
- Liegeois, A. (1977). Automatic supervisory control for the configuration and behavior of multibody mechanisms. *IEEE Trans. System, Man and Cybernetics* **7**(12), 842–868.
- Lin, Q., J. Burdick and E. Rimon (1997). A quality measure for compliant grasps. In: *Proc. IEEE ICRA 1997*. pp. 86–92.
- Liu, G., J. Xu and Z. Li (2004a). On geometric algorithms for real-time grasping force optimization. *IEEE Trans. Control Systems Technology* **12**(6), 843–859.
- Liu, G., J. Xu, X. Wang and Z. Li (2004b). On quality functions for grasp synthesis, fixture planning and coordinated manipulation. *IEEE Trans. Automation Science and Engineering* **1**(2), 146–162.
- Liu, Y., M. Lam and D. Ding (2004c). A complete and efficient algorithm for searching 3-D form closure grasps in the discrete domain. *IEEE Trans. Robotics* **20**(5), 805–816.
- Liu, Y.H. (2000). Computing n-finger form-closure grasps on polygonal objects. *Int. J. Robotics Research* **19**(2), 149–158.
- Lotti, F. and G. Vassura (2002). Design aspects for advanced robot hands: Mechanical design. In: *Tutorial: Towards Intelligent Robotic Manipulation, IEEE/RSJ IROS 2002*. pp. 1–16.
- Miller, A. and P. Allen (1999). Examples of 3D grasp quality computations. In: *Proc. IEEE ICRA 1999*. pp. 1240–1246.
- Miller, A. and P. Allen (2004). GraspIt! a versatile simulator for robotic grasping. *IEEE Robotics and Automation Magazine* **11**(4), 110–122.
- Mirtich, B. and J. Canny (1994). Easily computable optimum grasps in 2D and 3D. In: *Proc. IEEE ICRA 1994*. pp. 739–747.
- Mishra, B. (1995). Grasp metrics: Optimality and complexity. In: *Algorithmic Foundations of Robotics* (K. Goldberg, D. Halperin, J.C. Latombe and R. Wilson, Eds.). pp. 137–166. A.K. Peters.
- Mishra, B. and N. Silver (1989). Some discussion of static gripping and its stability. *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics* **19**(4), 783–796.
- Mishra, B., J.T. Schwartz and M. Sharir (1987). On the existence and synthesis of multifinger positive grips. *Algorithmica* **2**(4), 541–558.
- Morales, A., P.J. Sanz, A.P. del Pobil and A.H. Fagg (2002). An experiment in constraining vision-based finger contact selection with gripper geometry. In: *Proc. IEEE/RSJ IROS 2002*. pp. 1693–1698.
- Murray, R.M., Z. Li and S. Sastry (1994). *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC Press. Boca Raton, Florida.
- Nguyen, V.D. (1988). Constructing force-closure grasps. *Int. J. Robotics Research* **7**(3), 3–16.
- Okamura, A., N. Smaby and M. Cutkosky (2000). An overview of dexterous manipulation. In: *Proc. IEEE ICRA 2000*. pp. 255–262.
- Park, Y.C. and G.P. Starr (1992). Grasp synthesis of polygonal objects using a three-fingered robotic hand. *Int. J. Robotics Research* **11**(3), 163–184.
- Pollard, N.S. (1996). Synthesizing grasps from generalized prototypes. In: *Proc. IEEE ICRA 1996*. pp. 2124–2130.
- Pollard, N.S. (2004). Closure and quality equivalence for efficient synthesis of grasps from examples. *Int. J. Robotics Research* **23**(6), 595–614.
- Ponce, J. and B. Faverjon (1995). On computing three-finger force-closure grasps of polygonal objects. *IEEE Trans. Robotics and Automation* **11**(6), 868–881.
- Ponce, J., S. Sullivan, A. Sudsang, J.D. Boissonat and J.P. Merlet (1997). On computing four-finger equilibrium and force-closure grasps of polyhedral objects. *Int. J. Robotics Research* **16**(1), 11–35.

- Rimon, E. and J. Burdick (1996). On force and form closure for multiple finger grasps. In: *Proc. IEEE ICRA 1996*. pp. 1795–1800.
- Roa, M. and R. Suarez (2007). Geometrical approach for grasp synthesis on discretized 3D objects. In: *Proc. IEEE/RSJ IROS 2007*.
- Salisbury, J.K. and J.J. Craig (1982). Articulated hands: Force control and kinematic issues. *Int. J. Robotics Research* **1**(1), 4–17.
- Shimoga, K.B. (1996). Robot grasp synthesis algorithms: A survey. *Int. J. Robotics Research* **15**(3), 230–266.
- Stam, D., J. Ponce and B. Faverjon (1992). A system for planning and executing two-finger force-closure grasps on curved 2-D objects. In: *Proc. IEEE/RSJ IROS 1992*. pp. 210–217.
- Tegin, J. and J. Wikander (2005). Tactile sensing in intelligent robotic manipulation - a review. *Industrial Robot* **32**(1), 64–70.
- Teichmann, M. (1996). A grasp metric invariant under rigid motions. In: *Proc. IEEE ICRA 1996*. pp. 2143–2148.
- Teichmann, M. and B. Mishra (1997). The power of friction: Quantifying the “goodness” of frictional grasps. In: *Algorithms for Robotic Motion and Manipulation*. A.K. Peters. Wellesley, MA, USA. pp. 311–320.
- Wang, M.Y. (2000). An optimum design for 3-D fixture synthesis in a point set domain. *IEEE Trans. Robotics and Automation* **16**(6), 839–846.
- Xydias, N. and I. Kao (1999). Modeling of contact mechanics and friction limit surfaces for soft fingers in robotics with experimental results. *Int. J. Robotics Research* **18**(9), 941–950.
- Yoshikawa, T. (1984). Analysis and control of robot manipulators with redundancy. In: *Proc. 1st Int. Symposium of Robotic Research*. pp. 735–747.
- Yoshikawa, T. (1985). Manipulability of robotic mechanisms. *Int. J. Robotics Research* **4**(2), 3–9.
- Zhu, X. and J. Wang (2003). Synthesis of force-closure grasps on 3-D objects based on the Q distance. *IEEE Trans. Robotics and Automation* **19**(4), 669–679.
- Zhu, X., H. Ding and H. Li (2001). A quantitative measure for multifingered grasps. In: *Proc. IEEE/ASME Int. Conf. Advanced Intelligent Mechatronics 2001*. pp. 213–219.