

## Diseño de Observadores en Modos Cuasi-Deslizantes vía LMIs

Alberto Javier Fraguío\* José Luis Mancilla-Aguilar\*\* Aníbal Zanini\*\*\*

\* Grupo de Identificación y Control Robusto, Facultad de Ingeniería  
Universidad de Buenos Aires, Paseo Colón 850, Buenos Aires, Argentina  
(e-mail: [afraguio@conae.gov.ar](mailto:afraguio@conae.gov.ar))

\*\* Departamento de Físico-Matemática, Instituto Tecnológico de Buenos  
Aires, Avda. Madero 399, Buenos Aires, Argentina y Facultad de Ingeniería,  
Universidad de Buenos Aires (e-mail: [jmancill@itba.edu.ar](mailto:jmancill@itba.edu.ar))

\*\*\* Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires,  
Argentina (e-mail: [azanini@fi.uba.ar](mailto:azanini@fi.uba.ar))

Resumen: En este trabajo se presenta un observador robusto por modos cuasi-deslizantes para plantas con modelo nominal lineal e incertidumbres/perturbaciones de cierta clase particular. Las señales utilizadas para la estimación del vector de estados se suponen contaminadas con ruido del que sólo se conocen cotas. El diseño del observador se plantea como un problema de factibilidad LMI (Linear Matrix Inequalities) y se encuentran cotas para el error de estimación que pueden ser calculadas a priori. Posteriormente el diseño del observador se reformula como un problema de optimización GEVP (Generalized Eigen Value Problem) con el objeto de minimizar las cotas del error de estimación. El trabajo incluye un ejemplo numérico y simulaciones de un brazo robótico con un eje manejado por un motor de corriente continua. Copyright ©2008 CEA.

Palabras Clave: Observadores, Sistemas de control no lineales, Control por modos deslizantes, Invariancia, LMI, Optimización.

### 1. INTRODUCCIÓN

Los observadores por modos deslizantes se diseñan de manera que el error de estimación deslice sobre un subespacio  $S$  de menor dimensión que la del espacio de estados. Deslizar significa que el error de estimación converge a  $S$  en tiempo finito y permanece allí de ahí en más. En el subespacio  $S$  la dinámica del error de estimación presenta las características de estabilidad y comportamiento deseadas (Khalil, 1996; Utkin *et al.*, 1999). Edwards y Spurgeon (Edwards & Spurgeon, 1994; Tan & Edwards, 2000) proponen, para una clase particular de plantas, un observador robusto compuesto por un observador de Luenberger y un término adicional no lineal con el que se fuerza deslizamiento en el subespacio  $S = \{\hat{y} - y = 0\}$ , donde  $y$  es la salida de la planta e  $\hat{y}$  es su estimación. Ese término no lineal permite rechazar una clase particular de perturbaciones. En Edwards & Spurgeon (1994) y en Tan & Edwards (2000) se propone una forma canónica para el diseño del observador y se da una solución explícita pero no se aprovechan todos los grados de libertad disponibles. Tan y Edwards (Tan & Edwards, 2000) reformulan el diseño del observador como un problema de optimización convexo con restricciones LMI, lo cual permite aprovechar todos los grados de libertad. Con esto, los observadores por modos deslizantes pasan a formar parte de la inmensa lista de problemas de control que pueden ser formulados como problemas LMI (Boyd *et al.*, 1994; Gahinet *et al.*, 1994). En ausencia de perturbaciones la componente no lineal podría anularse, en cuyo caso el observador se reduce a uno de Luenberger. El criterio de optimización utilizado en Tan & Edwards (2000) consiste en que, sin la componente no lineal, el observador se aproxime al observador óptimo

lineal gaussiano. En esta formulación los grados de libertad los dan las matrices de covarianza de los ruidos blancos en las ecuaciones de estado y de salida.

En presencia de ruido de medición no es posible forzar deslizamiento, pero sí es posible mantener el error de estimación próximo al subespacio  $S$ . En este caso decimos que hay una condición de cuasi-deslizamiento y que el observador en cuestión es un observador por modos cuasi-deslizantes.

En este trabajo consideramos plantas con ruido de medición acotado y proponemos un observador similar al de Edwards y Spurgeon (Edwards & Spurgeon, 1994; Tan & Edwards, 2000; Edwards & Spurgeon, 1998) pero sustentado en los conceptos de cuasi-deslizamiento (Emelyanov *et al.*, 1995). Planteamos el diseño como un problema de factibilidad LMI y encontramos cotas finales para el error de estimación. Demostramos que bajo las mismas hipótesis que en Edwards & Spurgeon (1994) y en Tan & Edwards (2000) el error de estimación converge a un conjunto acotado. Además, si el conjunto de posibles condiciones iniciales para el error de estimación es acotado, entonces es posible garantizar convergencia en tiempo finito. Posteriormente, con el objeto de optimizar las cotas para los errores finales, reformulamos el diseño del observador como un problema de optimización GEVP.

La organización del trabajo es la siguiente. En la Sección 2 presentamos la clase de sistemas que consideramos a lo largo del trabajo. En la Sección 3 se presenta el observador que se propone y en la Sección 4 se efectúa el análisis de convergencia del mismo. En la Sección 5 se analizan ciertos aspectos prácticos, en particular la optimización de las cotas para el error de estimación obtenidas. En la Sección 6 se

presenta un ejemplo numérico y la simulación del observador obtenido en un brazo de robot. Finalmente la Sección 7 incluye las conclusiones.

## 2. SISTEMAS

La notación a lo largo del trabajo es estándar. En particular  $\bar{\sigma}(A)$  y  $\underline{\sigma}(A)$  representan, respectivamente, el máximo y mínimo valor singular de una matriz  $A$  y  $\|x\|$  es la norma euclidiana de  $x \in \mathbb{R}^n$ . Al conjunto de autovalores de la matriz  $A$  lo representamos por  $\lambda(A)$  y a su número de condición, definido como  $\bar{\sigma}(A)/\underline{\sigma}(A)$ , mediante  $\kappa(A)$ .

En este trabajo consideramos sistemas de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Ef_x(t, x, u) \\ y(t) &= Cx(t) + f_y(t) \end{aligned} \quad (1)$$

donde las matrices

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}, C \in \mathbb{R}^{p \times n} \text{ y } E \in \mathbb{R}^{n \times q}$$

forman el modelo nominal. Respecto de las funciones  $f_x$  y  $f_y$ , que modelan, respectivamente, incertidumbres/perturbaciones y ruidos de medición, suponemos que

$$\begin{aligned} \|f_x(t, x, u)\| &\leq \alpha(t, y, u) \\ \|f_y(t)\| &\leq \eta \end{aligned} \quad (2)$$

donde la función  $\alpha(t, y, u)$  y el escalar  $\eta$  son conocidos, y que  $f_x$  tiene la regularidad necesaria para garantizar la existencia de soluciones de la ecuación diferencial.

A lo largo de este trabajo consideraremos las siguientes hipótesis:

- (H1)  $q \leq p$ .
- (H2)  $C$  y  $E$  son matrices de rango completo.
- (H3) Los ceros invariantes de  $(A, E, C)$ , si tiene alguno, están en  $\mathbb{C}_-$ .

Es importante destacar que si se verifican (H1) a (H3) entonces el par  $(A, C)$  es detectable. Recíprocamente, si  $(A, C)$  es detectable, entonces se verifica (H3).

Los siguientes resultados, que son consecuencias de las hipótesis (H1) a (H3), serán utilizados más adelante.

*Lema 1.* Existe  $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que

$$\begin{aligned} \bar{A} &= TAT^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \\ \bar{E} &= TE = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{E}_2 \end{bmatrix} \\ \bar{C} &= CT^{-1} = [0 \ \bar{C}_2] \end{aligned}$$

donde  $\bar{A}_{11} \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (n-p)}$ ,  $\bar{C}_2 \in \mathbb{R}^{p \times p}$  es ortogonal y  $\bar{E}_2 \in \mathbb{R}^{q \times q}$  es no singular. Además

1. Los ceros invariantes de  $(A, E, C)$  están incluidos en  $\lambda(\bar{A}_{11})$ .
2.  $(A, C)$  es observable (detectable)  $\Leftrightarrow (\bar{A}_{11}, \bar{A}_{21})$  es observable (detectable).

*Demostración.* Ver Edwards & Spurgeon (1998).  $\square$

*Lema 2.* Sea  $(\bar{A}, \bar{E}, \bar{C})$  la terna del Lema 1. Consideremos la matriz de cambio de coordenadas

$$\bar{T} = \begin{bmatrix} I_{n-p} & \bar{L} \\ 0 & \bar{C}_2 \end{bmatrix}$$

donde

$$\bar{L} = [L \ 0] \in \mathbb{R}^{(n-p) \times p} \quad (3)$$

con  $L \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (p-q)}$ . Entonces

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \bar{T}\bar{A}\bar{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \\ \tilde{C} &= \bar{C}\bar{T}^{-1} = [0 \ I_p] \\ \tilde{E} &= \bar{T}\bar{E} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{E}_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

donde  $\tilde{A}_{11} \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (n-p)}$ ,  $\tilde{A}_{12} \in \mathbb{R}^{(n-p) \times p}$ ,  $\tilde{A}_{21} \in \mathbb{R}^{p \times (n-p)}$ ,  $\tilde{A}_{22} \in \mathbb{R}^{p \times p}$  y  $\tilde{E}_2 \in \mathbb{R}^{p \times q}$  con

$$\begin{aligned} \tilde{E}_2 &= \bar{C}_2 \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{E}_2 \end{bmatrix} \\ \tilde{A}_{11} &= \bar{A}_{11} + \bar{L}\bar{A}_{21} \\ \tilde{A}_{12} &= [I \ \bar{L}] \bar{A} \begin{bmatrix} -\bar{L} \\ I \end{bmatrix} \bar{C}_2^T. \end{aligned} \quad (5)$$

*Demostración.* Ver Edwards & Spurgeon (1998).  $\square$

*Teorema 3.* Si se verifican las hipótesis (H1) a (H3) entonces existen  $0 < P_2 = P_2^T \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $0 < \bar{P}_1 = \bar{P}_1^T \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (n-p)}$ ,  $0 < Y = Y^T \in \mathbb{R}^{p \times p}$  y  $0 < \mu \in \mathbb{R}$  tales que

$$\begin{bmatrix} \bar{A}^T \bar{P} + \bar{P} \bar{A} - 2\bar{C}^T Y \bar{C} & \bar{P} \\ \bar{P} & -\mu I \end{bmatrix} < 0 \quad (6)$$

donde

$$\bar{P} = \bar{T}^T \begin{bmatrix} \bar{P}_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \bar{T} \quad (7)$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{P}_1 & \bar{P}_1 \bar{L} \\ \bar{L}^T \bar{P}_1 & \bar{P}_2 + \bar{L}^T \bar{P}_1 \bar{L} \end{bmatrix} > 0 \quad (8)$$

con  $\bar{P}_2 = \bar{C}_2^T P_2 \bar{C}_2$ .

*Demostración.* Es consecuencia del Lema 2 y de la fórmula del complemento de Schur. Ver Teorema 4.1, página 99, de Fraguó (2006).  $\square$

## 3. FORMULACIÓN DEL OBSERVADOR

El observador que proponemos es el siguiente

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu - L_l e_y + L_n \nu(e_y) \\ e_y &= \hat{y} - y \\ \hat{y} &= C\hat{x} \end{aligned} \quad (9)$$

donde las matrices  $L_l$  y  $L_n$  están dadas por

$$L_l = T^{-1} \bar{P}^{-1} \bar{C}^T Y \quad (10)$$

$$L_n = T^{-1} \bar{P}^{-1} \bar{C}^T P_2 \quad (11)$$

con  $\bar{P}$ ,  $P_2$  e  $Y$  del Teorema 3. La señal  $\nu(e_y)$  es una función no lineal definida por

$$\nu(e_y) = -\rho\psi \frac{P_2 e_y}{\|P_2 e_y\| + \bar{\sigma}(P_2)\delta} \quad (12)$$

con

$$\rho \geq \bar{\sigma}(\bar{E}_2)\alpha(t, y, u) + \frac{\bar{\sigma}(Y)}{\underline{\sigma}(P_2)}\eta + \gamma \quad (13)$$

$$\psi = \frac{2\eta + \epsilon + \delta}{\epsilon} \quad (14)$$

$$\gamma \geq \frac{\sqrt{\kappa(P_2)}}{\sqrt{\underline{\sigma}(P_1)}}\bar{\sigma}(\tilde{A}_{21})\gamma_1 - \frac{\bar{\sigma}(P_2)(\eta + \epsilon)}{2\mu} \quad (15)$$

$$\gamma > 0 \quad (16)$$

$$\gamma_1 > 2\mu \frac{\kappa(P_2)}{\sqrt{\underline{\sigma}(P_1)}}\bar{\sigma}(\tilde{A}_{12})(\eta + \epsilon)\epsilon_1. \quad (17)$$

En relación con el observador propuesto en Tan & Edwards (2000),  $L_n$  es la misma matriz que allí aparece mientras que la componente no lineal  $\nu(e_y)$  es similar pero no la misma. El coeficiente  $\rho$  es una cota superior de las incertidumbres, perturbaciones y ruidos de medición. El coeficiente  $\psi$  es un factor de escala que depende de la cota del ruido de medición. Las condiciones (15) a (17) surgen del análisis de convergencia.

Observamos que el observador está parametrizado por (3), las LMIs del Teorema 3 y por los escalares  $\epsilon > 0$ ,  $\delta \geq 0$  y  $\epsilon_1 > 1$ . En lo que sigue veremos que con las matrices del Teorema 3 el error de estimación  $\hat{x} - x$  converge a un conjunto acotado que contiene al origen.

#### 4. ANÁLISIS DE CONVERGENCIA

##### 4.1 Ecuación Dinámica del Error de estimación

Definamos

$$\begin{aligned} z(t) &\triangleq \hat{x}(t) - x(t) \\ z_y(t) &\triangleq Cz(t) = e_y(t) + f_y(t). \end{aligned} \quad (18)$$

Derivando  $z(t)$  y empleando (1) y (9) obtenemos la ecuación dinámica del error de estimación

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A_o z + L_n \nu - E f_x + L_l f_y \\ z_y &= Cz \end{aligned} \quad (19)$$

donde

$$A_o \triangleq A - L_l C$$

Mediante el cambio de coordenadas  $\tilde{z} = Tz$ , con  $T$  como en el Lema 1, la ecuación (19) toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{z}} &= \tilde{A}_o \tilde{z} + \tilde{L}_n \nu - \tilde{E} f_x + \tilde{L}_l f_y \\ z_y &= \tilde{C} \tilde{z} \end{aligned} \quad (20)$$

*Lema 4.* Mediante el cambio de coordenadas  $\tilde{z} = \tilde{T}z$ , con  $\tilde{T}$  como en el Lema 2, la ecuación dinámica del error de estimación (20) toma la forma

$$\dot{\tilde{z}} = \tilde{A}_o \tilde{z} + \tilde{L}_n \nu - \tilde{E} f_x + \tilde{L}_l f_y \quad (21)$$

con  $\tilde{z} = [\tilde{z}_1 \ z_y]^T$  y

$$\tilde{A}_o = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} - P_2^{-1}Y \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\tilde{L}_l = \begin{bmatrix} 0 \\ P_2^{-1}Y \end{bmatrix}, \quad \tilde{L}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix}$$

donde  $\tilde{A}_{11}$ ,  $\tilde{A}_{12}$ ,  $\tilde{A}_{21}$  y  $\tilde{A}_{22}$  están definidas en (4).

*Demostración.* Ver Lema 4.1, página 103, de Fraguío (2006).  $\square$

Utilizando el lema anterior podemos reescribir la ecuación dinámica (21) como

$$\dot{\tilde{z}}_1 = \tilde{A}_{11}\tilde{z}_1 + \tilde{A}_{12}z_y \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_y &= \tilde{A}_{21}\tilde{z}_1 + \tilde{A}_{o22}z_y + \nu \\ &\quad - \tilde{E}_2 f_x + P_2^{-1}Y f_y. \end{aligned} \quad (24)$$

##### 4.2 Sectores

Consideremos  $\bar{P}$ ,  $\bar{P}_1$  y  $P_2$  en las condiciones del Teorema 3 y definamos las siguientes funciones positivas definidas

$$V(\tilde{z}) \triangleq \tilde{z}^T \bar{P} \tilde{z} \quad (25)$$

$$V_y(z_y) \triangleq z_y^T P_2 z_y \quad (26)$$

$$V_1(\tilde{z}_1) \triangleq \tilde{z}_1^T \bar{P}_1 \tilde{z}_1 \quad (27)$$

donde  $\tilde{z}$  es el error de estimación en el sistema de coordenadas del Lema 1,  $z_y = \bar{C}\tilde{z} = [0 \ I] \tilde{z}$  y  $\tilde{z}_1$  está formado por las primeras  $n - p$  componentes del error de estimación en coordenadas del Lema 2. Por (7) resulta

$$V(\tilde{z}) = V_y(z_y) + V_1(\tilde{z}_1). \quad (28)$$

Definimos también los siguientes conjuntos

$$\Omega \triangleq \{V(\tilde{z}) \leq \omega^2\}$$

$$\Omega_y \triangleq \{V_y(z_y) \leq \omega_y^2\} \quad (29)$$

$$\Omega_1 \triangleq \{V_1(\tilde{z}_1) \leq \omega_1^2\} \quad (30)$$

donde

$$\omega = \sqrt{\omega_y^2 + \omega_1^2}$$

$$\omega_y = \sqrt{\kappa(P_2)\bar{\sigma}(P_2)(\eta + \epsilon)} \quad (31)$$

$$\omega_1 = 2\mu \frac{\bar{\sigma}(\tilde{A}_{12})}{\sqrt{\underline{\sigma}(P_1)}}\kappa(P_2)(\eta + \epsilon)\epsilon_1 \quad (32)$$

con  $0 < \epsilon, \mu \in \mathbb{R}$  y  $1 < \epsilon_1 \in \mathbb{R}$ . En  $\Omega_y$  el movimiento está gobernado por (23) y (29). El lema que presentamos a continuación nos servirá para estudiar la evolución del error de estimación en  $\Omega_y$ .

*Lema 5.*

$$\tilde{A}_{11}\bar{P}_1 + \bar{P}_1\tilde{A}_{11} < -\frac{1}{\mu}\bar{P}_1\bar{P}_1 - \frac{1}{\mu}\bar{P}_1\tilde{L}\tilde{L}^T\bar{P}_1$$

$$\tilde{A}_{o22}^T P_2 + P_2 \tilde{A}_{o22} < -\frac{1}{\mu} P_2 P_2.$$

*Demostración.* Es consecuencia de las ecuaciones (6), (22), y (7), del Lema 2 y del Teorema 3. Ver Lema 4.2, página 105, de Fraguío (2006).  $\square$

El siguiente teorema describe el movimiento dentro de  $\Omega_y$ .

*Teorema 6.* El conjunto  $\Omega_1$  es atractivo en tiempo finito e invariante para las soluciones de (21) que evolucionan en  $\Omega_y$ . Además, si el sistema parte del instante  $t = t_0$  y entra en  $\Omega_1$  en  $t = t_1$ , entonces

$$t_1 - t_0 < \frac{1}{\phi} \left( \sqrt{V_1(\tilde{z}_1(t_0))} - \omega_1 \right)$$

con  $\omega_1$  dado por (32) y

$$\phi \triangleq \bar{\sigma}(\tilde{A}_{12})\kappa(P_2)\sqrt{\sigma(\bar{P}_1)}(\eta + \epsilon)(\epsilon_1 - 1). \quad (33)$$

*Demostración.* Llamemos  $\Phi_1 = \Omega_1^c \cup \partial\Omega_1$  donde  $\Omega_1^c$  y  $\partial\Omega_1$  son el complemento y la frontera de  $\Omega_1$ , respectivamente. Consideremos la función  $V_1$  definida en (27). Notemos que  $\|z_y\|_{\bar{z} \in \Omega_y} \leq \kappa(P_2)(\eta + \epsilon)$  y  $\|\bar{P}_1 \tilde{z}_1\| \geq \sqrt{\sigma(\bar{P}_1)}\sqrt{V_1(\tilde{z}_1)}$ . Utilizando las ecuaciones (24) y (30), junto con el Lema 5, la derivada de  $V_1$  en  $\Omega_y \cap \Phi_1$  puede ser acotada por

$$\dot{V}_1(\tilde{z}_1) \Big|_{\bar{z} \in \Omega_y \cap \Phi_1} < -2\phi \sqrt{V_1(\tilde{z}_1)} \Big|_{\bar{z} \in \Omega_y \cap \Phi_1},$$

lo que demuestra la atractividad en tiempo finito y la invariancia de  $\Omega_1$  para las soluciones de (21) que evolucionan en  $\Omega_y$ .

Supongamos que  $\tilde{z}(t_0) \notin \Omega_1$  y sea  $t_1 > t_0$  el instante de tiempo en que  $\tilde{z}$  ingresa a  $\Omega_1$  por primer vez, es decir,  $\tilde{z}(t_1) \in \partial\Omega_1 \subset \Phi_1$ . Consideremos la ecuación diferencial escalar

$$\dot{v}_1(t) = -2\phi\sqrt{v_1(t)}, \quad v_1(t_0) = V_1(t_0)$$

cuya solución verifica

$$\sqrt{v_1(t_1)} = -\phi(t_1 - t_0) + \sqrt{v_1(t_0)}.$$

Finalmente por el lema de comparación Khalil (1996) y puesto que, por (27),  $V_1(\tilde{z}_1(t_1)) = \omega_1^2$ , resulta

$$\omega_1 < -\phi(t_1 - t_0) + \sqrt{v_1(t_0)}$$

$\forall t \in [t_0, t_1]$  lo que termina la demostración.  $\square$

En vista del Teorema 6 queda ver bajo qué condiciones  $\Omega_y$  es atractivo en tiempo finito. Para esto necesitamos el siguiente lema

*Lema 7.* Sean  $\Omega_y^c$  y  $\partial\Omega_y$  el complemento y la frontera de  $\Omega_y$ , respectivamente. Entonces

$$z_y^T P_2 \nu \Big|_{\bar{z} \in \Omega_y^c \cup \partial\Omega_y} \leq -\rho \|P_2 z_y\| \Big|_{\bar{z} \in \Omega_y^c \cup \partial\Omega_y}$$

donde  $\nu$  está definida en (12) y  $\rho$  en (13).

*Demostración.* Por (12) y (18)

$$z_y^T P_2 \nu \leq -\rho \psi \|P_2 z_y\| \frac{\|P_2 z_y\| - \bar{\sigma}(P_2)\eta}{\|P_2(z_y - f_y)\| + \bar{\sigma}(P_2)\delta}.$$

Por (29)  $\bar{z} \in \Omega_y^c \cup \partial\Omega_y$  si y solo si  $V_y(z_y) \geq \omega_y^2$ , pero por Rayleigh  $\|P_2 z_y\|^2 \geq \sigma(P_2)V_y(z_y)$ . Luego por (31)  $\|P_2 z_y\| \Big|_{\bar{z} \in \Omega_y^c \cup \partial\Omega_y} \geq \sqrt{\sigma(P_2)}\omega_y = \bar{\sigma}(P_2)(\eta + \epsilon)$ . Por lo tanto, para  $\bar{z} \in \Omega_y^c \cup \partial\Omega_y$  el numerador de la cota de  $z_y^T P_2 \nu$  es positivo con lo que podemos escribir

$$z_y^T P_2 \nu \leq -\rho \psi \|P_2 z_y\| \frac{\|P_2 z_y\| - \bar{\sigma}(P_2)\eta}{\|P_2 z_y\| + \bar{\sigma}(P_2)(\eta + \delta)}$$

para todo  $\bar{z} \in \Omega_y^c \cup \partial\Omega_y$ . El cociente del lado derecho de esta desigualdad es estrictamente creciente <sup>1</sup> en  $\|P_2 z_y\|$  lo que implica, junto con (14), que

$$z_y^T P_2 \nu \Big|_{\bar{z} \in \Omega_y^c \cup \partial\Omega_y} \leq -\rho \|P_2 z_y\| \Big|_{\bar{z} \in \Omega_y^c \cup \partial\Omega_y}.$$

$\square$

El teorema que sigue trata sobre la atractividad de  $\Omega_y$ .

<sup>1</sup> Tiene la forma  $g(x) = \frac{x-a}{x+b}$  con  $a, b > 0$  cuya derivada es  $\dot{g}(x) = \frac{a+b}{(x+b)^2} > 0$

*Teorema 8.* El sector  $\Omega_y$  es atractivo en tiempo finito para las soluciones de la ecuación dinámica del error de estimación (20).

*Demostración.* Sea la función positiva definida  $V(\bar{z})$  definida en (25). Mediante álgebra de matrices es posible demostrar que

$$\begin{aligned} \bar{P}\bar{L}_n &= \bar{C}^T P_2 \\ \bar{P}\bar{L}_l &= \bar{C}Y \\ \bar{P}\bar{E} &= \bar{C}^T P_2 \tilde{E}_2. \end{aligned}$$

Definamos  $\Phi \triangleq \Omega_y^c \cup \partial\Omega_y$  donde  $\Omega_y^c$  y  $\partial\Omega_y$  son el complemento y la frontera de  $\Omega_y$ , respectivamente. Notemos que por ser  $\bar{C}_2$  ortogonal  $\bar{\sigma}(\tilde{E}_2) = \bar{\sigma}(\bar{E}_2)$ . Luego, utilizando las ecuaciones (2) y (13) y el Lema 7, tenemos que  $\dot{V}(\bar{z}) \Big|_{\bar{z} \in \Phi} < 0$ , pues

$$\dot{V}(\bar{z}) \Big|_{\bar{z} \in \Phi} \leq -\frac{\bar{\sigma}(\bar{P})}{\mu} V(\bar{z}) \Big|_{\bar{z} \in \Phi} - 2\gamma\bar{\sigma}(P_2)(\eta + \epsilon). \quad (34)$$

La demostración de que  $\Omega_y$  es atractivo en tiempo finito es por el absurdo. Si  $\bar{z} \notin \Omega_y \forall t \in [t_0, \infty)$ , por (34) existe  $t' \in (t_0, \infty)$  tal que  $V(\bar{z}(t')) = 0$  lo que contradice la suposición inicial.  $\square$

El Teorema 8 establece la atractividad en tiempo finito de  $\Omega_y$  pero no asegura que éste sea invariante. Como veremos a continuación no es posible garantizar la invariancia de  $\Omega_y$  en todo el espacio. Es decir, existe la posibilidad de que el error de estimación describa una trayectoria zigzagueante en la que ésta entre y salga de  $\Omega_y$ . Por el Teorema 6 sabemos que  $V_1(\tilde{z})$  decrece en  $\Omega_y - \Omega_1$ . El siguiente lema demuestra que el error, en su movimiento zigzagueante, converge a  $\Omega_1 \cap \Omega_y$ .

*Lema 9.* Sean  $t_1 < t_2 < \infty$  dos instantes de tiempo consecutivos tales que  $\tilde{z}(t_1), \tilde{z}(t_2) \in \partial\Omega_y$ . Si  $\tilde{z}(t) \notin \Omega_y \forall t \in (t_1, t_2)$  entonces

$$V_1(\tilde{z}_1(t_1)) > V_1(\tilde{z}_1(t_2))$$

donde  $V_1$  es la función definida en (27).

*Demostración.* Consideremos la función positiva definida

$$V(\bar{z}) = \bar{z}^T \bar{P} \bar{z} = V_y(t) + V_1(t)$$

dada en (25) y (28). Sabemos por (34) que  $\bar{V}(\bar{z}(t)) < 0 \forall t \in (t_1, t_2)$ , ya que por hipótesis  $\bar{z}(t) \in \Omega_y \cup \partial\Omega_y \forall t \in (t_1, t_2)$ . Por lo tanto  $\bar{V}(\bar{z}(t_2)) < \bar{V}(\bar{z}(t_1))$ . También por hipótesis  $V_y(t_1) = V_y(t_2) = \omega_y^2$ . Luego

$$0 < V(\bar{z}(t_1)) - V(\bar{z}(t_2)) = V_1(\tilde{z}_1(t_2)) - V_1(\tilde{z}_1(t_1))$$

lo que termina la demostración.  $\square$

Definamos el conjunto

$$\Gamma_1 \triangleq \{\tilde{z}_1 \mid V_1(\tilde{z}_1) \leq \gamma_1^2\}.$$

Por (17) y (32)  $\gamma_1 \geq \omega_1$ , lo que implica que  $\Omega_1 \subseteq \Gamma_1$ . Del desarrollo anterior el conjunto  $\Omega_y \cap \Gamma_1$  es atractivo para las soluciones de (21). En efecto, si el error de estimación  $\tilde{z}$  se encuentra fuera de  $\Omega_y$  para algún instante de tiempo dado entonces, por el Teorema 8, existe un instante de tiempo finito tal que  $\tilde{z}$  entra en  $\Omega_y$ . Dentro de  $\Omega_y$  el error  $\tilde{z}$  tiende a entrar en  $\Gamma_1$  ya que por diseño  $\Omega_1 \subseteq \Gamma_1$  y por el Teorema 6, el conjunto  $\Omega_1$  es atractivo para las soluciones de (21) que pertenecen a  $\Omega_y$ . Si en algún instante  $\tilde{z}$  sale de  $\Omega_y$ , por el Teorema 8 y por el Lema 9,  $\tilde{z}$  volverá a entrar en tiempo finito y más cerca de  $\Gamma_1$  de lo que estaba cuando dejó  $\Omega_y$ .

Como veremos a continuación el conjunto  $\Omega_y \cap \Gamma_1$  es invariante para las soluciones de (21). Esto nos permite, junto con el

Teorema 6 y el Lema 9, asegurar la convergencia de  $\tilde{z}$  al conjunto  $\Omega_y \cap \Gamma_1$ . El siguiente teorema trata sobre la invariancia de  $\Omega_y \cap \Gamma_1$ .

**Teorema 10.**  $\Omega_y \cap \Gamma_1$  es invariante para las soluciones de (21) para todo  $\gamma$  en (13) que verifique (15).

*Demostración.* Por el absurdo. Supongamos que  $\Omega_y \cap \Gamma_1$  no es invariante. En este caso dado  $\tilde{z}(t_1) \in \Omega_y \cap \Gamma_1$  existe  $t_2 > t_1$  tal que  $\tilde{z}(t_2) \notin \Omega_y \cap \Gamma_1$ . Pero, por continuidad de las soluciones de (21), esto implica a su vez la existencia de  $t' \in [t_1, t_2]$  tal que  $\tilde{z}(t') \in \partial(\tilde{\Gamma} \cap \tilde{\Omega})$ . Por el Teorema 6  $V_1(\tilde{z}_1)$  definida en (27) es estrictamente decreciente dentro de  $\Omega_y$ . Por lo tanto  $\tilde{z}$  sólo puede salir de  $\Omega_y \cap \Gamma_1$  atravesando la frontera de  $\Omega_y$ , es decir,  $\tilde{z}(t') \in (\partial\Omega_y) \cap \Gamma_1$ , con  $\dot{V}_y(z_y(t')) \geq 0$ , donde  $V_y(z_y)$  es la función definida en (26).

Por otro lado, la derivada de  $V_y$  sobre las soluciones de (24) es  $\dot{V}_y(z_y) = 2z_y^T P_2 \dot{z}_y$ . Utilizando los Lemas 5 y 7, junto con (2) y (13), la derivada  $\dot{V}_y$  en  $t = t'$  puede acotarse por

$$\dot{V}_y(z_y(t')) < -\frac{1}{\mu} \underline{\sigma}(P_2) V_y(t') - 2\sqrt{\underline{\sigma}(P_2)} \sqrt{V_y(t')} \left( \gamma - \frac{\sqrt{\kappa(P_2)}}{\sqrt{\underline{\sigma}(P_1)}} \bar{\sigma}(\tilde{A}_{21}) \sqrt{V_1(t')} \right).$$

Por construcción de  $t'$  y por (30) y (29) se verifican  $V_y(z_y(t')) = \omega_y^2$  y  $V_1(\tilde{z}_1(t')) \leq \gamma_1^2$ . Reemplazando estas relaciones y utilizando (31), resulta

$$\dot{V}_y(z_y(t')) < -2\sqrt{\underline{\sigma}(P_2)} \omega_y \times \left( \gamma - \left( \frac{\sqrt{\kappa(P_2)}}{\sqrt{\underline{\sigma}(P_1)}} \bar{\sigma}(\tilde{A}_{21}) \gamma_1 - \frac{\bar{\sigma}(P_2)(\eta + \epsilon)}{2\mu} \right) \right).$$

Por (15) el término entre paréntesis es no negativo y por lo tanto  $\dot{V}_y(z_y(t')) < 0$ . Pero esto se contradice con la suposición inicial. Luego  $\Omega_y \cap \Gamma_1$  es invariante.  $\square$

### 4.3 Cotas en el error de estimación

Por Rayleigh sabemos que si  $\tilde{z} \in \Omega_1 \cap \Omega_y$  entonces

$$\|z_y\| \leq \kappa(P_2)(\eta + \epsilon) \quad (35)$$

$$\|\tilde{z}_1\| \leq 2\mu \frac{\bar{\sigma}(\tilde{A}_{12})}{\underline{\sigma}(\tilde{P}_1)} \kappa(P_2)(\eta + \epsilon) \epsilon_1. \quad (36)$$

La desigualdad (35) establece que, en el mejor de los casos, el error en la estimación de  $\tilde{C}\tilde{x}$  puede acercarse a la magnitud del ruido de medición  $\eta$  tanto como se quiera. El precio a pagar es en la magnitud de la componente no lineal del observador  $\nu$ , ya que por (14) tiende a  $\infty$  cuando  $\epsilon$  tiende a 0. Lo deseable es que  $P_2$  sea ortogonal,  $\kappa(P_2) = 1$ , pero no siempre es posible verificar (6) con matrices  $P_2$  ortogonales.

Por (28), (31), (32) y (31) tenemos

$$\tilde{z} \in \Omega_1 \cap \Omega_y \Rightarrow \tilde{z} \in \Omega = \{ \tilde{z}^T \bar{P} \tilde{z} \leq \omega^2 \}.$$

### 4.4 Cotas en el tiempo de convergencia

Para simplificar la escritura definamos  $\Phi = \Omega_y^c \cup \partial\Omega_y$  donde  $\Omega_y^c$  y  $\partial\Omega_y$  son el complemento y la frontera de  $\Omega_y$ , respectivamente. Consideremos la condición inicial  $\tilde{z}(t_0) \in \Phi$  y la

función  $V$  definida en (25), que por (28) resulta  $V = V_1 + V_y$ , donde las funciones  $V_1$  y  $V_y$  son las definidas en (26)-(27). Si se cumplen las condiciones del Teorema 8 entonces existe  $t \in [t_0, \infty)$  tal que  $\tilde{z}(t_1) \in \partial\Omega_y \subset \Phi$  y, por (34), la derivada  $\dot{V} \Big|_{\Phi} < 0$ . Por lo tanto,  $V(t_1) = V_1(t_1) + \omega_y^2 < V(t_0)$ . Supongamos que las posibles condiciones iniciales en el error de estimación son acotadas, es decir,

$$\tilde{z}(t_0) \in \mathcal{B}(\tilde{z}_0) = \{ \|\tilde{z}\| \leq \tilde{z}_0 \}$$

con

$$\tilde{z}_0 > \frac{\omega_y}{\sqrt{\bar{\sigma}(\bar{P})}}. \quad (37)$$

Por Rayleigh

$$V(t_0) = \tilde{z}^T(t_0) \bar{P} \tilde{z}(t_0) \leq \bar{\sigma}(\bar{P}) \tilde{z}_0^2 \quad (38)$$

con lo cual

$$V_1(t_1) < \bar{\sigma}(\bar{P}) \tilde{z}_0^2 - \omega_y^2. \quad (39)$$

Notemos que si no se verifica (37), no tiene sentido el problema de acotar el lapso  $t_1 - t_0$  ya que en este caso  $\tilde{z}(t_0) \in \Omega_y \forall \tilde{z}(t_0) \in \mathcal{B}(\tilde{z}_0)$ . En efecto, si  $\tilde{z}_0 \leq \omega_y / \sqrt{\bar{\sigma}(\bar{P})}$  resulta  $V(t_0) \leq \bar{\sigma}(\bar{P}) \|\tilde{z}\|^2 \leq \omega_y^2$ . Luego, si

$$\gamma_1 \geq \sqrt{\bar{\sigma}(\bar{P}) \tilde{z}_0^2 - \omega_y^2}, \quad (40)$$

el error de estimación  $\tilde{z} \in \Omega_y \forall t \geq t_0$ , ya que  $\tilde{z}(t_1) \in \Omega_y \cap \Gamma_1$  y por el Teorema 10 el conjunto  $\Omega_y \cap \Gamma_1$  es invariante. Por lo tanto, para un conjunto acotado de condiciones iniciales siempre podemos asegurar, con  $\gamma_1$  suficientemente grande, que el error de estimación convergerá a  $\Omega_y$  en tiempo finito y que una vez allí no saldrá del mismo.

Aplicando el lema de comparación Khalil (1996) a (34) junto con (38) y el hecho de que por definición de  $t_1$   $V(t_1) = V_1(t_1) + \omega_y^2 \geq \omega_y^2$ , obtenemos la cota para el tiempo de convergencia

$$t_1 - t_0 \leq \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{\bar{\sigma}(\bar{P}) \tilde{z}_0^2 + b\gamma}{\omega_y^2 + b\gamma} \right) \quad (41)$$

donde  $b = 2\bar{\sigma}(P_2)(\eta + \epsilon)/\lambda$  y  $\lambda = \bar{\sigma}(\bar{P})/\mu$ . Por (37) el argumento de la función logaritmo es mayor o igual a 1 y estrictamente decreciente<sup>2</sup> en  $\gamma$ . Por lo tanto, es posible achicar la cota  $t_1 - t_0$  tanto como se desee mediante un valor suficientemente grande de  $\gamma$ .

Si  $\tilde{z}(t_1) \in \Omega_1$  entonces por el Teorema 6,  $\tilde{z}(t) \in \Omega_1 \forall t \geq t_1$ . Cuando  $\tilde{z}(t_1) \notin \Omega_1$ , por el Teorema 6 sabemos que existe  $t_2 \in (t_1, \infty)$  tal que  $\tilde{z}(t_2) \in \partial\Omega_1$ . Reemplazando (39) en la cota de  $t_2 - t_1$  del Teorema 6 resulta

$$t_2 - t_1 < \frac{\sqrt{\bar{\sigma}(\bar{P}) \tilde{z}_0^2 - \omega_y^2} - \omega_1}{\phi}$$

con  $\phi$  definida en (33).

## 5. ASPECTOS PRÁCTICOS

En esta sección reformulamos el diseño del observador como un problema de optimización de autovalores generalizados con el objeto de aprovechar los numerosos grados de libertad que tiene el observador propuesto.

<sup>2</sup> La derivada del argumento respecto de  $\gamma$  es  $\frac{\omega_y^2 - \bar{\sigma}(\bar{P}) \tilde{z}_0^2}{(\omega_y^2 + b\gamma)^2}$

### 5.1 Objetivos

Como objetivo de optimización proponemos minimizar las cotas de las desigualdades (35) y (36). Para minimizar la cota de  $\|z_y\|$  es deseable una matriz  $P_2$  con el menor número de condición posible. Idealmente  $P_2$  ortogonal, pero como comentamos anteriormente esto no siempre es posible. Para minimizar la cota de  $\|\tilde{z}_1\|$ , además de  $\kappa(P_2)$  mínimo, también se desean  $\mu/\bar{\sigma}(\bar{A})$  y  $\bar{\sigma}(\bar{A}_{12})$  lo más chicos posible. En general, por (5) la matriz  $\bar{A}_{12} = \bar{A}_{12}(\bar{L})$ . En el caso particular  $p = q$ , por (3) resulta  $\bar{L} = 0$ , lo que implica  $\bar{A}_{12} = \bar{A}_{12}\bar{C}_2^T$ . Por lo tanto, cuando  $p = q$ , la matriz  $\bar{A}_{12}$  no depende de los parámetros de diseño. Por el contrario, cuando  $p > q$  es necesario restringir los valores de  $\bar{L}$  para disminuir  $\bar{\sigma}(\bar{A}_{12})$ . Una manera simple, pero conservadora, es la siguiente: partiendo de (5) y recordando que  $\bar{C}_2$  es ortogonal, resulta  $\bar{\sigma}(\bar{A}_{12}) \leq (1 + \bar{\sigma}(\bar{L}))^2 \bar{\sigma}(\bar{A})$ . Si bien se trata de una cota conservadora, acotando  $\bar{\sigma}(\bar{L})$  nos aseguramos que al resolver el problema no resulten valores demasiado grandes de  $\bar{\sigma}(\bar{A}_{12})$ .

Con respecto a la cota de  $\|\tilde{z}_1\|$ , queda considerar el parámetro  $\epsilon_1$ . Desde el punto de vista del error de estimación es deseable que sea lo más pequeño posible. Sin embargo, la cota (41) en el tiempo de convergencia converge a  $\infty$  cuando  $\epsilon_1 \rightarrow 1$ . Por lo tanto,  $\epsilon_1$  representa un compromiso entre la cota de  $\|\tilde{z}_1\|$  y la cota del tiempo de convergencia.

Para tratar de cumplir con estos objetivos proponemos el siguiente problema de optimización. Consideremos las siguientes variables adicionales  $a > 0$  y  $t$ . El problema de optimización es

$$\text{minimizar } t$$

sujeto a (6)-(8)-(3) y a las siguientes restricciones adicionales

$$aI < P_2 < atI \quad (42)$$

$$\mu < t - 1$$

$$\bar{\sigma}(\bar{L}) < (t - 1) \quad (43)$$

$$\frac{1}{t - 1} < \underline{\sigma}(\bar{P}_1). \quad (44)$$

La restricción (42) fuerza la minimización del número de condición de la matriz  $P_2$ . En efecto, por definición

$$\kappa(P_2) = \frac{\bar{\sigma}(P_2)}{\underline{\sigma}(P_2)} < \frac{at}{a} = t.$$

Notemos que (42) implica  $t > 1$  y, por lo tanto, (43) y (44) están bien planteadas.

### 5.2 Formulación como Problema de Autovalores Generalizados

Reescribamos  $\bar{P}$  como en Tan & Edwards (2000)

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix} \quad (45)$$

con  $P_{11} \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (n-p)}$ ,  $P_{12} \in \mathbb{R}^{(n-p) \times p}$  y  $P_{22} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ . La matriz  $P_{12} = [P_{121} \ 0]$  con  $P_{121} \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (p-q)}$ . Igualando con (8) y despejando resultan

$$\begin{cases} \bar{P}_1 = P_{11} \\ P_2 = \bar{C}_2 (P_{22} - P_{12}^T P_{11}^{-1} P_{12}) \bar{C}_2^T \\ \bar{L} = P_{11}^{-1} P_{12} \end{cases} \quad (46)$$

Comencemos con la restricción (42). Por (46) y por ser  $\bar{C}_2$  ortogonal, esta restricción es equivalente a

$$aI < P_{22} - P_{12}^T P_{11}^{-1} P_{12} < atI,$$

pero por el complemento de Schur es, a su vez, equivalente a

$$aI < \bar{P} < atI.$$

Por lo tanto, minimizar el número de condición de  $P_2$  es equivalente a minimizar el de  $\bar{P}$ . Por (46) la restricción (43) no es una LMI en las variables  $P_{11}$  y  $P_{12}$ . Es necesario reformular el problema. Siendo conservadores podemos escribir

$$\bar{\sigma}(\bar{L}) \leq \bar{\sigma}(P_{11}^{-1}) \bar{\sigma}(P_{12}) = \frac{1}{\underline{\sigma}(P_{11})} \bar{\sigma}(P_{12}).$$

Luego, la minimización de  $\bar{\sigma}(\bar{L})$  se consigue minimizando  $\bar{\sigma}(P_{12})$  al mismo tiempo que se maximiza  $\underline{\sigma}(P_{11})$ . La maximización de  $\underline{\sigma}(P_{11})$  ya la formulamos en la restricción (44). Por lo tanto, para minimizar la cota de  $\bar{\sigma}(\bar{L})$  se reemplaza la restricción (43) por  $\bar{\sigma}(P_{12}) < t - 1$ , o equivalentemente por  $P_{12}^T P_{12} < (t - 1)^2 I$ . Definiendo

$$N \triangleq \begin{bmatrix} I_{n-p} & 0 \\ 0 & 0_{p \times p} \end{bmatrix}$$

$$M \triangleq \begin{bmatrix} 0_{(n-p) \times (n-p)} & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix}$$

y utilizando el complemento de Schur, esta desigualdad puede reescribirse como

$$N\bar{P}M + (N\bar{P}M)^T + tI_n - I_n > 0.$$

Por (46) la restricción (44) es equivalente a  $\frac{1}{\underline{\sigma}(\bar{P}_{11})} = \bar{\sigma}(P_{11}^{-1}) < t - 1$  que a su vez es equivalente a  $P_{11}^{-1} < (t - 1)I_{n-p}$ . Sea  $0 < X = X^T \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (n-p)}$ . Con esta nueva variable podremos reformular la desigualdad anterior como una LMI en  $X$ ,  $P_{11}$  y  $t$  de la siguiente manera

$$X < (t - 1)I_{n-p}$$

$$P_{11}^{-1} < X.$$

Por el complemento de Schur la última desigualdad es equivalente a

$$\begin{bmatrix} X & I_{n-p} \\ I_{n-p} & P_{11} \end{bmatrix} > 0.$$

Definiendo  $Q \triangleq [I_{n-p} \ 0_{(n-p) \times p}]$  la desigualdad anterior toma la forma

$$\begin{bmatrix} X & I_{n-p} \\ I_{n-p} & Q\bar{P}Q^T \end{bmatrix} > 0.$$

### 5.3 Algoritmo de diseño

El siguiente algoritmo surge del desarrollo anterior.

1- Resolver el problema de optimización

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } t \\ & \text{sujeto a} \end{aligned} \quad (47)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \bar{A}^T \bar{P} + \bar{P} \bar{A} - 2\bar{C}^T Y \bar{C} & \bar{P} \\ \bar{P} & -\mu I \end{bmatrix} < 0 \\ aI < \bar{P} \\ \begin{bmatrix} X & I_{n-p} \\ I_{n-p} & Q\bar{P}Q^T \end{bmatrix} > 0 \\ \bar{P}, X, Y, \mu, a > 0 \\ I_n - N\bar{P}M - (N\bar{P}M)^T < tI_n \\ \bar{P} < atI_n \\ \mu < t \end{array} \right.$$

donde  $\bar{P}$  tiene la estructura de (45).

2- Calcular  $P_2$  a partir de (46).

3- Calcular las ganancias del observador  $L_l$  y  $L_n$  utilizando las Ecuaciones (10) y (11).

4- Elegir  $\epsilon > 0$  resolviendo el compromiso formado por el valor máximo de  $\nu$  en (12)-(14) y la cota en el error de estimación (35).

5- Diseño de  $\epsilon_1$ ,  $\gamma_1$  y  $\gamma$

1. *Caso General.* Cuando no se conoce la región de las posibles condiciones iniciales en el error de estimación. En este caso elegir en orden:
  - a)  $\epsilon_1 > 1$ ;
  - b)  $\gamma_1$  sujeto a (17);
  - c)  $\gamma > 0$  sujeto a (15).
2. *Caso Particular.* Cuando las condiciones iniciales  $\bar{z}(t_0) \in \Omega$  con  $z_0$  que satisface (37), el tiempo de convergencia a  $\Omega_1 \cap \Omega_y$  queda acotado por (41). Elegir en orden:
  - a)  $\epsilon_1 > 1$  resolviendo el compromiso formado por la cota en el error de estimación (36) y la cota en el tiempo de convergencia (41);
  - b)  $\gamma_1$  sujeto a (17) y (40);
  - c)  $\gamma > 0$  sujeto a (15), y de manera que (41) cumpla con las especificaciones.

6- Elegir  $\rho$  de manera que verifique (13).

## 6. EJEMPLO

### 6.1 Planta y Modelo

Consideremos un manipulador robótico simple (Figura 1) formado por un único eslabón y manejado por un motor de corriente continua.

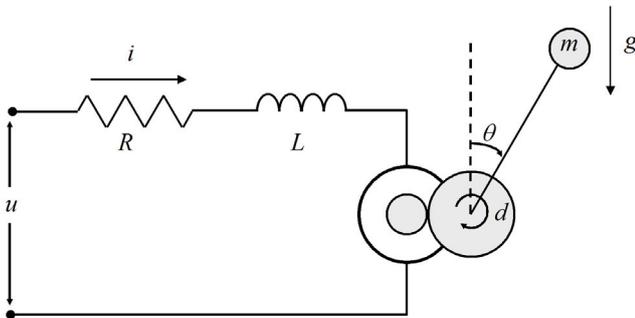


Figura 1. Manipulador robótico de un eje.

El brazo se encuentra contenido en el plano vertical al piso. Para simplificar el modelado suponemos que el eslabón está formado por una barra de masa despreciable con una masa puntual en su extremo. Bajo estas simplificaciones, el modelo matemático está dado por

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= -\frac{R}{L}i - \frac{k_e N}{L}\dot{\theta} + \frac{1}{L}u \\ \ddot{\theta} &= \frac{k_t N}{ml^2}i - \frac{b}{ml^2}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\sin(\theta) + \frac{1}{ml^2}d \end{aligned}$$

donde  $u(t)$ ,  $i(t)$ ,  $\theta(t)$  y  $d(t)$  son respectivamente la tensión sobre los bornes del motor, la corriente de armadura del motor,

el ángulo del brazo respecto a la vertical y el torque de perturbación. La mayoría de los parámetros fueron tomados de Utkin *et al.* (1999) y se describen en la Tabla 1.

**Tabla 1. Parámetros del manipulador robótico de un eje. Unidades en SI**

Parámetro	Valor	Descripción
$R$	0,5	Resistencia de armadura
$L$	0,001	Inductancia de armadura
$k_e$	0,008	Constante contra electro motriz
$k_t$	0,008	Constante de torque
$m$	1	Masa del eslabón
$l$	0,4	Longitud del eslabón
$b$	0,2	Coefficiente de fricción viscosa
$N$	100	Relación del tren de engranes
$g$	9,8	Aceleración de la gravedad

El torque de perturbación es incierto pero acotado por

$$|d(t)| \leq 10Nm \quad \forall t.$$

Deseamos estimar la corriente de armadura  $i(t)$  midiendo la posición y velocidad angular del brazo

$$y_1(t) = \theta(t) + f_{y_1}(t), \quad y_2(t) = \dot{\theta}(t) + f_{y_2}(t)$$

donde  $f_{y_i}(t)$  es ruido blanco con distribución uniforme en el intervalo  $[-0,0175, +0,0175]$ <sup>3</sup> de donde resulta

$$\|f_{y_i}(t)\| \leq 0,0175\sqrt{2} = \eta.$$

Definiendo  $x_1(t) = i(t)$ ,  $x_2(t) = \theta(t)$  y  $x_3(t) = \dot{\theta}(t)$  resultan

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & 0 & -\frac{k_e N}{L} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_t N}{ml^2} & 0 & -\frac{b}{ml^2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y

$$\alpha(y_1) = 24,5 (|\sin(y_1)| + |\cos(y_1)|) + 62,5.$$

donde recordemos que  $|f_x(x_2, d)| \leq \alpha(y_1)$ . Evidentemente  $C$ ,  $E$  y  $CE$  son de rango completo. La terna  $(A, E, C)$  tiene un único cero invariante en  $-R/L$ . Por lo tanto se verifican las hipótesis (H1) a (H3). Notemos que  $(A, E, C)$  ya se encuentra en la forma canónica del Lema 1.

### 6.2 Diseño

Resolviendo el problema de autovalores generalizados (47) resultan

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} 31,4822 & 0,0000 & 0 \\ 0,0000 & 31,4591 & -0,0000 \\ 0 & -0,0000 & 31,4591 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0,7007 & 0,0000 \\ 0,0000 & 1,0088 \end{bmatrix} 10^6$$

$$\mu = 0,0319, \quad t = 1,0320.$$

Por (46)

$$P_2 = \begin{bmatrix} 31,4591 & -0,0000 \\ -0,0000 & 31,4591 \end{bmatrix}$$

y por (10) y (11)<sup>4</sup>

<sup>3</sup>  $\pm 0,0175\text{rad} \simeq \pm 1^\circ$

<sup>4</sup> En este ejemplo particular la matriz de cambio de coordenadas del Lema 1 es la identidad

$$L_l = \begin{bmatrix} -0,0000 & -0,0000 \\ 2,2274 & 0,0000 \\ 0,0000 & 3,2066 \end{bmatrix} 10^4$$

$$L_n = \begin{bmatrix} -0,0000 & -0,0000 \\ 1,0000 & 0 \\ 0 & 1,0000 \end{bmatrix}.$$

Con  $\epsilon = 0,005$  y  $\delta = 0,01$  resulta  $\psi = 12,8995$ . Fijando  $\epsilon_1 = 1,125$  y tomando  $\gamma_1$  lo mas pequeño posible, pero que verifique simultáneamente (17) y (40), obtenemos  $\gamma_1 = 16,84$ . Análogamente, eligimos el  $\gamma > 0$  más chico posible que verifique (15) resulta  $\gamma = 0,3176$ . Finalmente, por (13)

$$\rho = 24,5 (|\sin(y_1(t))| + |\cos(y_1(t))|) + 794.$$

### 6.3 Convergencia

En este ejemplo particular, el error de estimación del vector de estados es  $z = \hat{x} - x = [z_1 \ z_{y_1} \ z_{y_2}]^T = [\hat{i} - i \ \hat{\theta} - \theta \ \hat{\dot{\theta}} - \dot{\theta}]^T$ . Suponiendo que en  $t = t_0$

$$|\hat{i} - i| \leq 2,5A, \quad |\hat{\theta} - \theta| \leq \pi/2, \quad |\hat{\dot{\theta}} - \dot{\theta}| \leq \pi/8$$

resulta una condición inicial  $z(t_0) \in \mathcal{B}(3)$ . Luego

1.  $z(t) \in \Omega_y = \{z_{y_1}^2 + z_{y_2}^2 \leq 0,0278\} \forall t \geq t_0$  con  $t_1 - t_0 \leq 9,3mseg$ ;
2.  $z(t) \in \Omega_1 = \{|z_1| \leq 0,0542\} \forall t \geq t_2 \geq t_1$  con  $t_2 - t_1 \leq 990mseg$ .

Por lo tanto, se puede asegurar que dentro de  $t_2 - t_0 \leq 1seg$  la corriente de armadura se estima con un error menor o igual a  $54,2mA$ .

### 6.4 Simulaciones

Las condiciones de simulación son las siguientes  $x(0) = [-2,5 \ \pi/2 \ \pi/8]^T$ ,  $\hat{x}(0) = [0 \ 0 \ 0]^T$ ,  $u(t) = 1(t - 0,02)$  y

$$d(t) = \begin{cases} 0 & : & t < 0,05 \\ 10 & : & 0,05 \leq t < 0,0625 \\ -10 & : & 0,0625 \leq t < 0,0750 \\ 0 & : & t \geq 0,075 \end{cases}.$$

En las Figuras 2 y 3 mostramos los errores de estimación junto con los sectores  $\Omega_1$ ,  $\Gamma_1$  y  $\Omega_y$ . Notamos que si bien las cotas halladas a priori se verifican, éstas son muy conservadoras. Sin embargo siguen siendo útiles para, por ejemplo, el diseño de sensores de corriente con fines de protección contra sobrecarga.

Para evaluar el desempeño del observador (9), comparamos los errores de estimación cometidos por este observador con los del propuesto en Tan & Edwards (2000). Los resultados se muestran en la Figura 4, en la cual se aprecia el mejor desempeño del observador aquí propuesto, ya que el mismo presenta un mejor rechazo al torque de perturbación y al ruido de medición debido a que no requiere de un régimen de deslizamiento como en Tan & Edwards (2000). Como desventaja tenemos que las señales involucradas son de mayor magnitud, lo cual no es problemático si, por ejemplo, el observador se utiliza con fines de sensado para monitoreo o protección.

## 7. CONCLUSIONES

En este trabajo presentamos un observador robusto por modos cuasi deslizantes para plantas con modelo nominal lineal afectado por perturbaciones/incerteza y con ruido de medición.

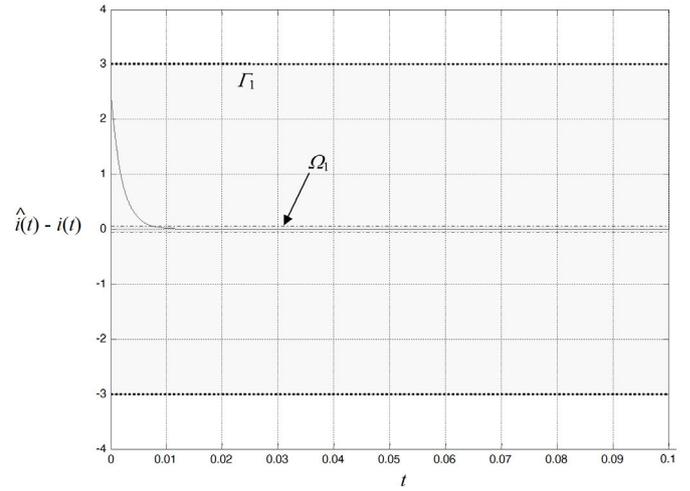


Figura 2. Error de estimación  $z_1$ . La línea de trazo representa el contorno de  $\Omega_1$  y la línea punteada el contorno de  $\Gamma_1$ .

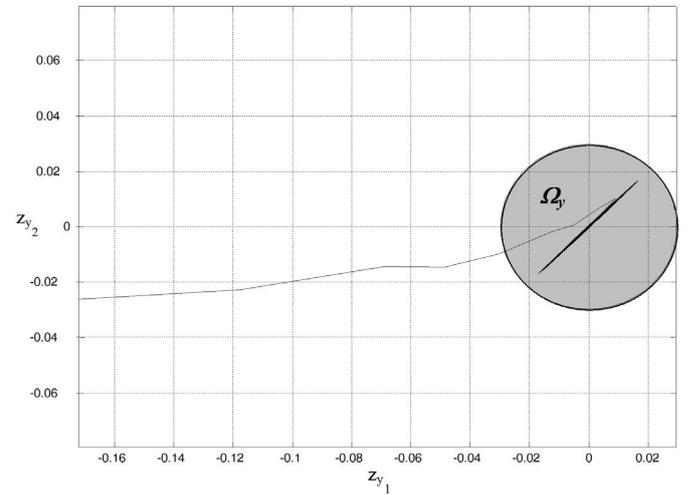


Figura 3. Error de estimación  $z_y$ .

El diseño del observador se planteó como un problema de factibilidad LMI y se probó, bajo ciertas hipótesis, la convergencia del error de estimación a un conjunto acotado que contiene al origen de coordenadas. También se proporcionaron cotas a priori para el error de estimación.

Posteriormente se reformuló el problema de diseño del observador como uno de optimización GEVP con el objeto de minimizar las cotas para el error de estimación.

Finalmente, se presentó un ejemplo de simulación que mostró el buen desempeño del observador propuesto y la verificación de las cotas obtenidas a priori, aunque las cotas en el tiempo de convergencia resultaron ser muy conservadoras. Comparado con el observador por modos deslizantes propuesto en Tan & Edwards (2000), el observador aquí propuesto presentó un mejor rechazo al torque de perturbación y al ruido de medición, pero, como desventaja, señales de mayor magnitud.

## REFERENCIAS

Boyd, S., L.E. Ghaoui, E. Feron y V. Balakrishnan (1994). *Linear matrix inequalities in system and control theory*.

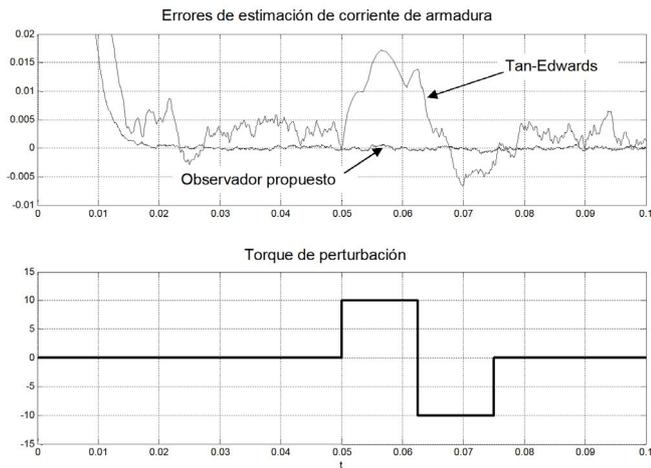


Figura 4. Error de estimación de la corriente de armadura del observador de Tan-Edwards vs. el propuesto en este trabajo.

*SIAM Studies in applied and numerical mathematics*. SIAM, Philadelphia.

Edwards, C. y S.K. Spurgeon (1994). On the development of discontinuous observers. *International Journal of Control* **25**, pp. 1211-1229.

Edwards, C. y S.K. Spurgeon (1998). *Sliding mode control: theory and applications*. Taylor and Francis, London.

Emelyanov, S.V., S.K. Korovin y I.G. Mamedov (1995). *Variable- Structure Control Systems: Discrete and Digital*. CRC Press. Boca Raton.

Fraguío, A. (2006). *Observadores por modos deslizantes*. Tesis de grado. Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires. Disponible en <http://www.fi.uba.ar/laboratorios/gicor/afraguio/afraguio.html>.

Gahinet, P., A. Nemirovskii, A.J. Laub y M. Chilali (1994). The LMI control toolbox. In *Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control*. pp. 2038 - 2041. IEEE publications, Piscataway, NJ.

Khalil, H.K. (1996). *Nonlinear systems* (3rd ed.). Prentice-Hall. Englewood Cliffs.

Utkin, V., J. Guldner y J. Shijun (1999). *Sliding mode control in electromechanical systems*. Taylor and Francis, London.

Tan C.P. y C. Edwards (2000). An LMI approach for designing sliding mode observers. In *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*. pp. 2587-2592. IEEE publications, Piscataway, NJ.