

Modelización, Análisis y Control de Sistemas de Cojinetes Magnéticos Activos

I. Arredondo,* J. Jugo,* S. Alonso-Quesada,* I. Lizarraga*
y V. Etxebarria*

* Dpto. de Electricidad y Electrónica. UPV/EHU.
e-mail: inigo.arredondo@ehu.es, josu.jugo@ehu.es,
santiago.alonso@ehu.es, ibone.lizarraga@ehu.es,
victor.etxebarria@ehu.es

Resumen: En este estudio se presentan el modelado, diseño de control, análisis de robustez y procedimiento de reducción activa de vibraciones de un sistema consistente en un eje sustentado mediante levitación magnética activa. Primero se describen la obtención del modelo y las características fundamentales del sistema. Empleando dicho modelo y aprovechando propiedades de simetría, se diseña un control de sustentación. Este se ajusta experimentalmente mediante un estudio de robustez, según el estándar ISO 14839-3. Por último, se realiza una reducción de las vibraciones que se producen en rotación, utilizando control adaptativo. El controlador final diseñado ha sido implementado experimentalmente con éxito. *Copyright © 2008 CEA*

Palabras Clave: Cojinetes magnéticos, Modelado, Robustez, Control Activo, Máquina Herramienta.

1. INTRODUCCIÓN

La levitación magnética y en particular los cojinetes magnéticos activos (AMB, del inglés Active Magnetic Bearings), constituyen una línea de investigación en desarrollo tanto académica como industrial, debido a las ventajas que proporciona, en especial, la sustentación sin rozamiento. Como es una tecnología de soporte sin contacto, la suspensión magnética hace posible altas velocidades de rotación, no requiere lubricación y opera en un régimen de no vibración del conjunto de la máquina, lo que proporciona una mayor longevidad de los componentes de los aparatos (Schweitzer *et al.* 1994), (Kasarda 2000). Estas características hacen que los AMB sean apropiados para máquina herramienta de alta velocidad (Chen and Knospe 2007), lugares de difícil acceso como transbordadores espaciales, donde se utilizan en sistemas de almacenamiento de energía (Wagner *et al.* 2002), y otras aplicaciones en las que es también clave la ausencia de lubricación, pues permite su uso en entornos en los que los cojinetes convencionales no podrían ser utilizados, como en aplicaciones bio-médicas (Untaroiu *et al.* 2005) y en nuevas tecnologías de reactores nucleares (Suyuan *et al.* 2006).

Hay que destacar que la existencia de una monitorización inherente en los dispositivos basados en AMB permite obtener en todo momento información sobre el comportamiento del sistema, en especial sobre las vibraciones que se producen, con lo que se asegura un correcto funcionamiento del aparato dentro de los límites adecuados de trabajo y se puede estimar la necesidad de mantenimiento (Quinn *et al.* 2005). Además, los cojinetes magnéticos pueden ser usados como actuadores para hacer un control activo del rotor, en vez de únicamente soportarlo como hacen los cojinetes convencionales. Esto se aprovecha para suprimir desequilibrios derivados del diseño del sistema y efectos

que se generan debido a la naturaleza del mismo como por ejemplo, para la eliminación del traqueteo (chatter, en inglés) y para controlar las fuerzas de corte basándose en las corrientes que se proporciona a los AMB en maquinado de alta velocidad (Knospe 2007) o (Stephenson and Agapionu 1996).

Los cojinetes magnéticos, sin embargo, tienen también algunas desventajas como son su inherente inestabilidad, su naturaleza no lineal y el hecho de ser menos amortiguados que los cojinetes convencionales. Esto significa que siempre es necesario incluir un controlador para estabilizar el eje, que la obtención de un sistema que siga unas especificaciones dadas puede ser complicada, en función de la aplicación concreta que se considere y que el propio diseño mecánico debe tenerse muy en cuenta para la consecución de sistemas precisos. Con todo, las cada vez más numerosas aplicaciones y las expectativas sobre esta tecnología han motivado la aparición de diversos trabajos sobre distintos aspectos como la eficiencia en el consumo energético (Hu *et al.* 2004), el control activo de vibración (Nonami and Liu 1999), el control no lineal (Maslen and Meeker 1995) y el control robusto (Lanzon and Tsiotras 2002). Este último tipo de control permite al dispositivo funcionar correctamente frente a cambios en su estado de operación debido a perturbaciones, calentamiento o derivas de los valores nominales de los parámetros en el tiempo. Esta característica es fundamental para varias de las aplicaciones mencionadas anteriormente (en transbordadores espaciales, implantes médicos, máquina herramienta). Por esto, recientemente, se ha desarrollado el estándar específico para el análisis del margen de estabilidad de máquinas con AMBs, ISO 14839-3 "Mechanical Vibration- Vibration of rotating machinery equipped with active magnetic bearings- Part 3: Evaluation of stability margin", (ISO 2004), que en este momento se encuentra en fase de aprobación definitiva y

sobre el que actualmente se está trabajando (Kanemitsu *et al.* 2006), (Li *et al.* 2006). Además, el uso de estas técnicas de control robusto no entra en conflicto con la aplicación del control activo de vibración mientras se cumplan unas determinadas condiciones. Así, realizando el control activo mediante métodos adaptativos, si la frecuencia síncrona que se quiere minimizar está dentro del ancho de banda del controlador encargado de mantener la estabilidad y el algoritmo de estimación es más lento que la dinámica del lazo cerrado, se puede asegurar que el control activo no desestabilizará el sistema (Shi *et al.* 2004). De esta manera, es posible combinar las dos técnicas de control sobre el mismo aparato para conseguir un mejor comportamiento.

En este artículo se describe un modelado completo, con el correspondiente análisis y validación, así como el proceso de diseño de control, optimizado mediante un análisis de robustez, y la implementación de un control activo para la reducción de vibración, para un dispositivo basado en levitación magnética cuyo núcleo lo conforma el *MBC 500 Rotor Dynamics* de LaunchPoint Technologies, Goleta CA (Figura 1). El modelo, que incorpora los efectos más importantes que se observan experimentalmente en la máquina, entre los que se encuentran su fuerte no linealidad y las vibraciones debidas a la descompensación del eje, es validado mediante la comparación de simulaciones con medidas experimentales y es utilizado para diseñar un controlador capaz de estabilizar el sistema. Una vez logrado este objetivo, este controlador es ajustado experimentalmente con el fin de conseguir el comportamiento más robusto posible haciendo uso de las premisas expuestas en el estándar ISO 14839-3. A su vez, este controlador es imprescindible para mantener la estabilidad, dada la naturaleza inestable del sistema y por tanto es necesario para realizar las medidas experimentales con las que validar el sistema. Por último se incluye un control adaptativo feedforward, que reduce las vibraciones que se presentan en rotación y que es ayudado por la adición de un lazo de enganche en frecuencia (FLL) que es capaz de paliar los errores en la medida de la frecuencia de rotación.



Figura 1. MBC 500 Rotor Dynamics

La organización del texto es la siguiente: En primer lugar se describen el sistema experimental y la obtención de un modelo adecuado de la dinámica de sustentación del eje que es analizado y validado mediante medidas experimentales. A continuación, en la sección 3 se presenta el diseño del controlador. Este proceso se divide en dos partes fundamentales, la primera consiste en asegurar la estabilidad del sistema mediante un controlador cuya obtención se ve facilitada por la simetría que presenta el sistema, para más tarde ajustarlo experimentalmente aplicando el estándar ISO 14839-3 y de esta manera, optimizar la robustez. La

segunda parte en el diseño del control, trata de minimizar las vibraciones que se producen por la rotación haciendo uso de un control adaptativo ayudado por un FLL. Finalmente, las conclusiones del trabajo se muestran en la sección 4.

2. DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA DE EJE ROTANTE LEVITADO MEDIANTE AMBS

El sistema sobre el que se van a hacer los ensayos se compone de tres elementos fundamentales: el sistema de levitación por cojinetes magnéticos *MBC500 Rotor Dynamics* de LaunchPoint, la tarjeta controladora *DS1003* de dSPACE gobernada mediante un procesador digital de señal (DSP) y un PC encargado, por un lado, de la configuración del sistema y programación de la tarjeta controladora a través del entorno MATLAB/Simulink y por otro, de la monitorización del trabajo mediante el software ControlDesk de dSPACE. Un esquema del sistema completo se encuentra en la Figura 2.

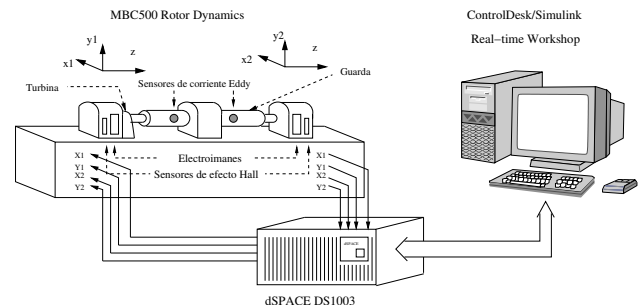


Figura 2. Esquema del dispositivo experimental

La parte fundamental del sistema a estudio es el dispositivo de cojinetes magnéticos compuesto por dos AMBs y un eje con capacidad de rotación mediante una turbina de aire comprimido, gracias a la que el rotor logra alcanzar velocidades de hasta 22000 rpm. Esta frecuencia de rotación es medida mediante un encoder posicionado cerca de la turbina.

Por otro lado, la posición del rotor se determina por sensores de efecto Hall cercanos a los cojinetes, y la actuación sobre estos últimos, que ejercen la fuerza necesaria para la levitación, está dirigida mediante amplificadores de voltaje. Así mismo, existen conectores por los que obtener la posición medida por los sensores y otros por los que actuar sobre los amplificadores (Figura 3).

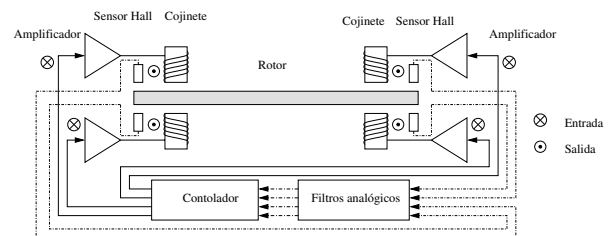


Figura 3. Esquema del *MBC 500 Rotor Dynamics*

El primer paso para llevar a cabo la descripción del sistema es construir un modelo con el que poder simular su comportamiento y sobre el que probar las distintas estrategias de control. Además para comprobar su eficacia, es necesario compararlo con el sistema físico. En este

proceso, que se expondrá a continuación, quedan patentes diversas peculiaridades que se dan en los dispositivos basados en AMBs en general.

2.1 Modelado

Actualmente, pueden distinguirse dos maneras de encarar el problema del modelado de un sistema de estas características, que se diferencian básicamente en la forma de obtener el modelo del rotor. Una se realiza desde un punto de vista constructivo (Tamisier and Carrère 2004) mientras que en la otra se utiliza únicamente una herramienta de elementos finitos (FEA) (Ahn and Han 2003). Se presenta a continuación un esquema del proceso de modelado (para más detalle sobre esta cuestión ver (LaunchPoint 2002) y (Arredondo *et al.* 2006)):

- Modelado de la mecánica
 - Modelado del rotor.
 - Opción 1:
 - ◇ Modelado de la parte rígida mediante la aplicación de las leyes de Newton.
 - ◇ Modelado de la parte flexible mediante un análisis de elementos finitos (FEA).
 - Opción 2:
 - ◇ Modelado completo del rotor mediante FEA.
 - Modelado del efecto provocado por la descompensación del eje (mass unbalance).
 - Modelado del efecto giroscópico.¹
 - Modelado del acoplamiento provocado por los elementos cruzados de la elasticidad.¹
- Modelado de la parte electromecánica.
 - Modelado de la fuerza electromecánica producida por los cojinetes.
 - Modelado de amplificadores, sensores y filtros.
- Superposición en un modelo completo.

En este artículo se ha elegido la segunda opción por ser la más precisa ya que es la que mejor se ajusta a los resultados experimentales.

Combinando los modelos de la parte mecánica (rotor) y electromecánica se obtiene la ecuación no lineal (1)², donde se toman como entradas los voltajes proporcionados por el controlador (V_c) y como entradas externas la frecuencia de rotación deseada (ω) y la gravedad (g). Por otra parte, las salidas son los voltajes proporcionados por los sensores de efecto Hall (V_{hall}) que miden la posición del eje.

$$\begin{bmatrix} V_{hallx_1} \\ V_{hally_1} \\ V_{hallx_2} \\ V_{hally_2} \end{bmatrix} = f(\tilde{X}_m, [V_{cx_1}, V_{cy_1}, V_{cx_2}, V_{cy_2}, \omega, g]) \quad (1)$$

En esta expresión, f representa una función no lineal y los subíndices 1 y 2 indican que la variable está referida al cojinete izquierdo y al derecho respectivamente.

¹ Se puede demostrar que el efecto giroscópico y que el acoplamiento cruzado de la elasticidad son despreciables para el *MBC500 Rotor Dynamics*. Por esto y por razones de simplicidad no se hará mención de ellos. Para más información sobre el cálculo de estos efectos (Childs 1993).

² Debido a la complejidad de la ecuación se presenta únicamente de manera descriptiva

El modelo del rotor obtenido mediante el FEA es lineal y de la forma

$$\dot{\tilde{X}}_r = A_r \tilde{X}_r + B_r \bar{F}_{total}; \quad \begin{bmatrix} \bar{x}_{hall} \\ \bar{x}_{coj} \end{bmatrix} = C_r \tilde{X}_r \quad (2)$$

donde A_r , B_r y C_r son las matrices de estado de la dimensión adecuada, $\bar{x}_{hall} = [x_{hallx_1}, x_{hally_1}, x_{hallx_2}, x_{hally_2}]^T$ y $\bar{x}_{coj} = [x_{cojx_1}, x_{cojy_1}, x_{cojx_2}, x_{cojy_2}]^T$ son las posiciones del eje en los puntos donde están localizados los sensores de efecto Hall y los cojinetes respectivamente y de \bar{F}_{total} que es la fuerza total que se ejerce sobre el rotor. De esta fuerza las componentes más relevantes son la ejercida por los cojinetes \bar{F}_{coj} y la provocada por la no coincidencia del centro de masas con el eje principal de rotación \bar{F}_{ctf} .

La primera, que es parte del modelado electromecánico, posee un fuerte carácter no lineal y es de la forma (3) debido a la configuración diferencial en la que están dispuestos los cojinetes.

$$F_{coji} = K \frac{(i_i + i_0)^2}{(x_{coji} - x_g)^2} - K \frac{(i_i - i_0)^2}{(x_{coji} + x_g)^2} \quad (3)$$

$i = x_1, y_1, x_2, y_2$

En (3), $K = 2,8 \times 10^{-7} Nm^2/A^2$ es una constante geométrica que depende del cojinete, x_{coji} la posición del rotor, $x_g = 0,0004m$ la distancia efectiva entre el rotor y los cojinetes, i_i la intensidad proporcionada por el amplificador al cojinete, e i_0 la corriente de bias. Esta es de $0,5A$ tanto para el eje x como para el y pero, sin embargo, en este último eje queda descompensada en beneficio del electroimán superior para hacer frente al efecto de la gravedad.

Es importante recalcar que la configuración diferencial de los cojinetes unida a la inclusión de la corriente de *bias* conlleva una mayor facilidad a la hora de linealizar la fuerza magnética.

La segunda de las fuerzas que actúan sobre el eje es la denominada fuerza provocada por la descompensación (unbalance) que como ya se ha mencionado es una fuerza centrífuga. En concreto, se puede expresar como (4) (Schweitzer *et al.* 1994)

$$\bar{F}_{ctf} = U([\omega^2, \text{sen}\omega t, \text{cos}\omega t]) \quad (4)$$

con ω la frecuencia de rotación y U una función que depende linealmente de ω^2 , $\text{sen}\omega t$ y $\text{cos}\omega t$.

Esta fuerza centrífuga es por tanto síncrona con la velocidad de giro y dependerá también del desplazamiento entre el centro de masas y el eje de rotación, que son parámetros que se pueden considerar constantes.

En definitiva, se producirá una vibración síncrona con la velocidad de giro y por tanto de frecuencia conocida que se podrá reducir mediante el empleo de control activo como se muestra en la sección 3.

El modelo resultante, (1), en el que se combinan (2), (3), (4) y la descripción de los restantes elementos (amplificadores, filtros, sensores), es difícil de tratar analíticamente debido a su complejidad. Por esta razón es conveniente realizar una linealización del mismo con el fin de obtener uno más manejable con el que diseñar controles adecuados mediante diferentes estrategias. Aun así, los diseños de

control llevados a cabo con el modelo lineal se aplicarán al modelo completo no lineal para no perder generalidad a la hora de observar los resultados en simulación.

Linealizando la fuerza magnética (3) y la dinámica de los actuadores y acondicionadores, se consigue la representación en el espacio de estados (5),

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B \begin{bmatrix} V_{cx1} \\ V_{cy1} \\ V_{cx2} \\ V_{cy2} \\ \omega^2 \text{sen}\omega t \\ \omega^2 \text{cos}\omega t \\ g \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} V_{hallx1} \\ V_{hally1} \\ V_{hallx2} \\ V_{hally2} \end{bmatrix} = C\bar{x} \quad (5)$$

donde g es la gravedad, $\omega^2 \text{sen}\omega t$ y $\omega^2 \text{cos}\omega t$ son parte de la dinámica introducida por la descompensación del eje, ω es la frecuencia de rotación, V_c el voltaje proporcionado por el controlador al *MBC500 Rotor Dynamics* y V_{hall} el proporcionado por los sensores de efecto Hall posicionados en los extremos del rotor. Los subíndices x e y denotan los ejes de coordenadas horizontal y vertical respectivamente y 1 o 2 el cojinete al que se refiere, siendo 1 el más próximo a la turbina (izquierdo) y el 2 el más alejado (derecho). Por otro lado, \bar{x} es el vector de estados, que en el caso a estudio es de dimensión 16×1 , considerando los dos modos rígidos y dos modos flexibles de vibración, y A , B y C las matrices de estado de la dimensión adecuada.

Es conveniente darse cuenta de que este modelo lineal posee cierto carácter no lineal debido a las entradas $\omega^2 \text{sen}\omega t$ y $\omega^2 \text{cos}\omega t$.

Por otro lado, el modelo lineal en su representación en funciones de transferencia para cada uno de los ejes de coordenadas y a velocidad constante es simétrico y se puede representar mediante (6) cuando se encuentra en régimen de no rotación. La existencia de esta simetría es de gran importancia pues muestra que se da una relación entre las dinámicas de los dos cojinetes que permite la separación del movimiento en los modos cónico y traslacional. Esto otorga una gran ventaja a la hora de diseñar un controlador tal y como se estudiará en la subsección 3.1.1 mediante el uso de una técnica de control modal.

$$\begin{bmatrix} V_{hallx1} \\ V_{hallx2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(s) & B(s) \\ B(s) & A(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{cx1} \\ V_{cx2} \end{bmatrix} \quad (6)$$

2.2 Validación del modelo

La validación del modelo no lineal se lleva a cabo mediante la comparación entre las medidas reales y las simulaciones realizadas con él, al someterlo a las mismas condiciones que se dan experimentalmente. El modelo lineal simplificado únicamente se utilizará para el diseño del controlador.

En primer lugar se comparará la dinámica del eje fuera de la máquina en simulación, con la que se observa experimentalmente obtenida mediante un sistema de medida de precisión externo, basado en un vibrómetro láser. La segunda de las pruebas consistirá en observar la similitud entre la simulación y las medidas realizadas con el eje en su posición dentro de la máquina rotando a diferentes

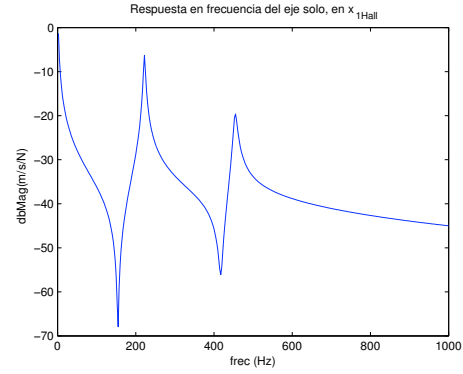


Figura 4. Simulación de la respuesta en velocidad de vibración del eje solo frente a impactos.

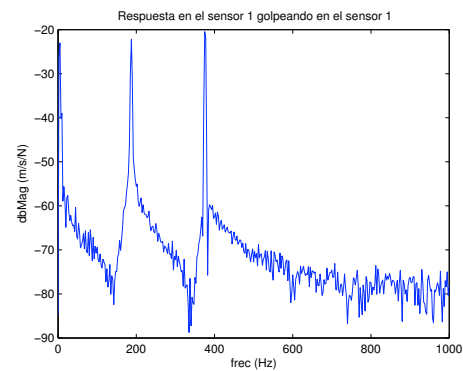


Figura 5. Respuesta experimental en velocidad de vibración del eje solo frente a impactos.

velocidades levitando gracias al controlador diseñado en la subsección 3.1. También se probará la capacidad del modelo de explicar efectos no lineales observados.

Así, realizando las pruebas únicamente con el eje, se puede observar la similitud entre las figuras 4 y 5 donde se representa la respuesta en frecuencia de la velocidad de vibración del eje frente a impactos en simulación y experimentación respectivamente.

En estas representaciones queda patente que la dinámica del sistema viene caracterizada principalmente por los denominados modos rígidos y sus modos de resonancia mecánicos de los cuales los más relevantes son el primero y segundo.

Por otro lado, una vez estabilizado el eje, levitado mediante los cojinetes magnéticos, se obtiene su posición medida con sensores de efecto Hall frente a distintas velocidades de rotación tanto en simulación como en experimentación (para x_{hall1} , Figura 6 y Figura 7). La velocidad de rotación, experimentalmente, se controla mediante la utilización de un PID discreto implementado en el DSP. Su función es regular el voltaje de control necesario para adecuar la frecuencia de referencia a la medida realizada por el encoder asociado a la turbina.

En estas dos últimas gráficas queda clara la dinámica que introduce la descompensación del eje y su evolución según la velocidad angular de giro.

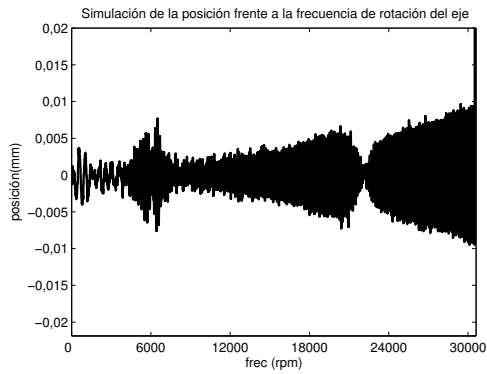


Figura 6. Simulación del comportamiento del eje según la frecuencia de rotación.

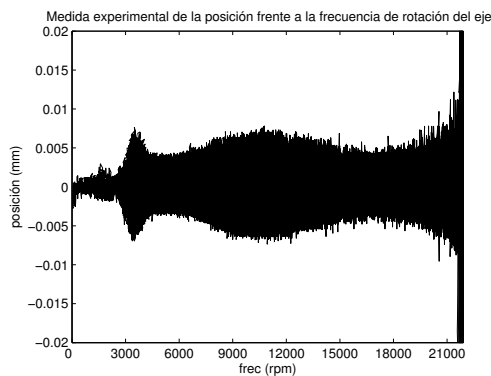


Figura 7. Comportamiento experimental del eje según la frecuencia de rotación.

Es importante mencionar que estas y las posteriores simulaciones y medidas experimentales han de ser realizadas en lazo cerrado debido al carácter inestable del sistema. Por esto, es imprescindible incluir un controlador que en este caso será el que se presenta en la subsección 3.1.1. De esta manera, es necesario el modelo para diseñar el controlador y éste a su vez es necesario para validar el modelo.

Comportamiento no lineal Como ya se ha mencionado anteriormente, la fuente de no linealidad más relevante es la fuerza magnética (3). Esta característica es general en los dispositivos basados en AMBs y conviene estudiarla más en detalle.

En particular, midiendo la posición del rotor en el dominio frecuencial mientras se aumenta poco a poco la velocidad de rotación hasta alcanzar la velocidad crítica en la que el sistema se desestabiliza se obtiene la Figura 8. En ella, además de la oscilación síncrona provocada por el desequilibrio de masas, tal y como se ha explicado en la subsección 2.1, se observa un espurio a $\sim 50Hz$ que va aumentando según lo hace la velocidad de rotación. De esta forma, se puede considerar que actúa como sumidero de energía.

Es la combinación de este efecto unido con el provocado por el desequilibrio de masas ya mencionado lo que provoca la desestabilización del rotor al alcanzar la frecuencia de giro crítica que es de $22000rpm$ aproximadamente.

Estos hechos se pueden explicar realizando un estudio en el dominio armónico tomando como base el modelo no lineal

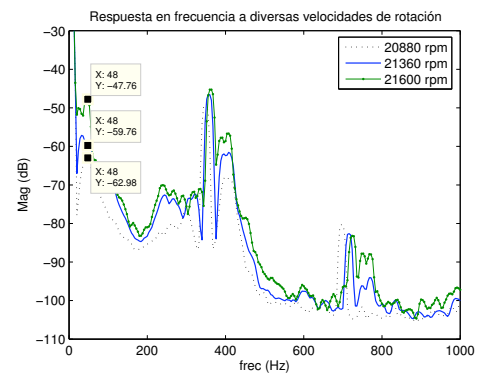


Figura 8. Aumento de la ganancia del espurio de $50Hz$ llegando a la velocidad crítica.

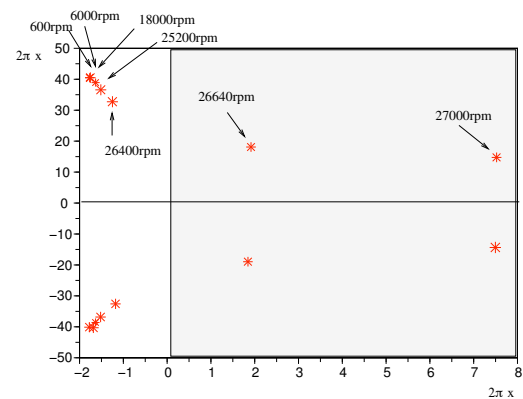


Figura 9. Evolución de los exponentes de Floquet de la planta respecto a la velocidad de rotación

y el controlador que se diseña en la siguiente sección. Hay que recalcar que el hecho de que el modelo sea coherente con estas observaciones experimentales, es prueba de su validez.

Este estudio no lineal que se centra en la fuerza magnética que ejercen los cojinetes (3), se realiza mediante el análisis de los modelos t-variantes (LTV) que se consiguen a cada velocidad de rotación, resultantes de la linealización en el dominio armónico del sistema, alrededor de una solución no lineal estacionaria (Jugo *et al.* 2006). Concretamente se analiza la estabilidad de cada uno de esos sistemas LTV mediante los exponentes de Floquet que según en qué parte del plano complejo se encuentren indican si el sistema es o no estable. De esta manera, en la Figura 9, en la que se representa el exponente de Floquet alrededor de $50Hz$ a diferentes velocidades de rotación, queda patente cómo al alcanzar la velocidad de rotación crítica en simulación, éste pasa a la parte real positiva del plano complejo lo que predice una desestabilización del sistema.

El efecto no lineal de vibración debido a la fuerza centrífuga puede ser reducido mediante un control activo, tal y como se demostrará en la sección 3.

3. DISEÑO DEL CONTROLADOR

El diseño de un controlador específico para el dispositivo es fundamental a la hora de comenzar el estudio de un sistema basado en cojinetes magnéticos pues éste es inherentemente inestable y por lo tanto dicho controlador

ha de ser usado desde la etapa de validación y análisis del modelo del sistema. Por otra parte, una vez se han dado esos primeros pasos resulta interesante minimizar en la medida de lo posible las vibraciones síncronas provocadas por el desequilibrio en el rotor. En este caso, esto se lleva a cabo mediante un control adaptativo feedforward.

3.1 Diseño y ajuste de un PID que garantiza la sustentación

En primer lugar se realiza un estudio teórico que permite diseñar un controlador que mantenga el rotor en sustentación basado en el modelo simplificado presentado en la subsección 2.1. Este proceso se ve facilitado por la estructura simétrica del sistema.

De cualquier forma, este controlador no estará ajustado de una manera precisa para el dispositivo experimental y será necesario establecer otro criterio que pueda aplicarse directamente sobre el dispositivo físico con el que obtener un mejor rendimiento. En esta sección se tratará de conseguir el comportamiento más robusto posible a partir del PID diseñado previamente.

Diseño teórico del PID. El diseño del controlador se ve simplificado por la estructura simétrica del sistema (para más detalle sobre este proceso (Jugo *et al.* 2005)). Esta característica que posee el dispositivo, permite separar los dos sistemas MIMO 2×2 , uno por cada eje de coordenadas, en dos SISOs independientes atendiendo a sus modos traslacional y cónico. Esta metodología es denominada control modal y facilita la aplicación de otras técnicas de control.

Tal y como se menciona en (Schweitzer *et al.* 1994) un controlador diseñado a frecuencia de rotación nula es capaz de estabilizar el sistema a velocidades de giro no nulas. Es más, en la subsección 3.1.2 se muestra experimentalmente que en el sistema a estudio la velocidad de giro, mientras no sea crítica, no afecta de forma severa a la estabilidad. De esta manera, para conseguir un primer controlador, se puede partir de (6).

Así, considerando el controlador simétrico,

$$G_c(s) = \begin{bmatrix} C(s) & D(s) \\ D(s) & C(s) \end{bmatrix} \quad (7)$$

la ecuación característica del sistema (6) en lazo cerrado con (7) es,

$$\det \begin{pmatrix} 1 + CA + DB & CB + DA \\ CB + DA & 1 + CA + DB \end{pmatrix} = 0 \quad (8)$$

Substituyendo $A' = CA + DB$ y $B' = CB + DA$ se obtiene,

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 + A' & B' \\ B' & 1 + A' \end{pmatrix} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 1 + A'^2 - B'^2 + 2A'B' &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow [1 + (A' + B')][1 + (A' - B')] &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

De esta manera, deshaciendo el cambio realizado se tiene,

$$[1 + (C + D)(A + B)][1 + (C - D)(A - B)] = 0 \quad (10)$$

por lo que el sistema se puede dividir en dos problemas de control SISO diferentes simplificando el procedimiento de cálculo del control. Así, siendo $C_1(s) = C(s) + D(s)$ y $C_2(s) = C(s) - D(s)$ los sistemas obtenidos serán,

$$1 + C_1(s)(A(s) + B(s)) = 0 \quad (11)$$

$$1 + C_2(s)(A(s) - B(s)) = 0 \quad (12)$$

llegando al controlador del sistema MIMO, de la forma,

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{C_1(s) + C_2(s)}{2} \\ D(s) &= \frac{C_1(s) - C_2(s)}{2} \end{aligned} \quad (13)$$

En este artículo se asume por simplicidad que $D(s) = 0$. Así, $C_1(s) = C_2(s) = C(s)$.

El diseño ha sido realizado utilizando el lugar de las raíces en el dominio discreto con vistas a su implementación práctica.

En este caso se ha elegido el PID que se muestra en (14) con un periodo de muestreo de $T = 1/12000$ s. La elección de este periodo viene dada por el compromiso entre la estabilidad, que necesita una alta frecuencia de muestreo y la capacidad del hardware, que además de este control se encarga también del control de velocidad y del control activo que se presenta posteriormente. Hay que recalcar que aunque este controlador es prácticamente un PD, es capaz de suprimir el error en el permanente, lo cual se traduce en un mejor centrado del rotor.

$$C_c(z) = \frac{(z - 0,999)(z - 0,9)}{(z - 1)(z - 0,45)} \quad (14)$$

Así, con $C(z) = kC_c(z)$ se puede obtener un rango de valores de la ganancia k que establezcan tanto el lugar de las raíces discreto para $C_c(z)(A(z) + B(z))$ como para $C_c(z)(A(z) - B(z))$. En particular, se ha elegido como referencia para las pruebas experimentales el valor $k = 6,5$.

Por otro lado, es necesario ajustar el controlador para obtener el mejor rendimiento posible experimentalmente. Esto se llevará a cabo tomando como criterio la robustez del sistema.

Ajuste experimental del controlador. Uno de los puntos más importantes a la hora de diseñar un controlador para un sistema levitado, es su capacidad de mantener la estabilidad frente a perturbaciones. Por ello es necesario realizar un análisis de robustez que permita modificarlo con el fin de alcanzar un buen resultado.

En el caso de los aparatos basados en cojinetes magnéticos, los criterios de estabilidad robusta clásicos, esto es, el margen de ganancia g_m y el margen de fase φ , no son condición suficiente para determinar si se consigue un rango de estabilidad adecuado. De esta manera, tal y como se expone en la norma ISO 14839-3 para vibración mecánica (ISO 2004), es el máximo de la función de sensibilidad $\max_{ij} S_{ij}(j\omega)$, el que se toma como criterio debido a que está relacionado con la distancia mínima entre la función de transferencia del lazo abierto más restrictiva y el punto crítico $(-1, 0j)$ en el diagrama de Nyquist. Los subíndices

i, j , de S_{ij} hacen referencia al carácter multivariable que presentan esta clase de sistemas.

Por otro lado, G. Li et al. (Li et al. 2006) han probado teóricamente que este criterio no es válido para todos los tipos de máquinas provistas de AMBs y falla en concreto en las máquinas cuyo acoplamiento cruzado de elasticidad es fuerte y en las que existe incertidumbre en sus modos frecuenciales. Esta última incertidumbre viene generalmente dada por el efecto giroscópico. Estos efectos son despreciables en el *MBC500 Rotor Dynamics*, así como en general para las máquinas de este tipo y es posible realizar un análisis tal y como se expone en el estándar.

De este modo, cuanto más bajo sea el máximo de la función sensibilidad, más robusto será su comportamiento. Este hecho se aprovecha para ajustar experimentalmente las ganancias de cada eje de coordenadas basándose en el controlador diseñado en la subsección 3.1.1 (14), de manera que se obtenga la mayor robustez posible.

En la Figura 10 se muestra la función sensibilidad para el eje x del cojinete 1 a diferentes velocidades de rotación, para la que se consigue una sensibilidad máxima de entre $11dB$ y $12dB$. Esta medida es similar para el cojinete 2 y de menor magnitud para los dos cojinetes en el eje y . La finalidad de realizar las medidas para diferentes velocidades de rotación es analizar la función sensibilidad en diferentes puntos de operación.

A la vista de la Figura 10, donde se muestra que la tendencia de todas las medidas es la misma, se concluye que la velocidad de rotación no altera sustancialmente la sensibilidad mientras no se encuentre cerca de frecuencias críticas y que por tanto, es suficiente con analizarla en estado de no rotación. Hay que tener en cuenta que en la función sensibilidad, cuando se considera la estabilidad del sistema, únicamente se toman en cuenta los valores más altos que se dan a todas las frecuencias de rotación, excluyendo de esta manera, los picos que se producen a la frecuencia asociada a la velocidad de rotación en cada medida.

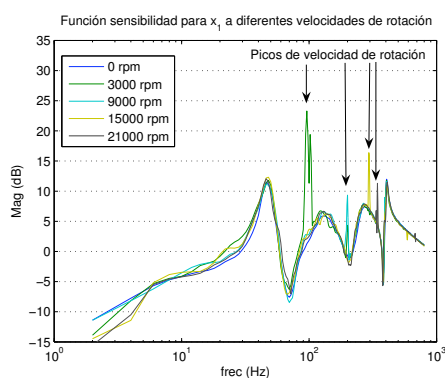


Figura 10. Función sensibilidad para el eje x del cojinete 1 a diferentes velocidades de rotación

El ajuste de las ganancias del controlador ha sido llevado a cabo observando qué cambios en el controlador hacen crecer el límite superior de sensibilidad por encima de los $11-12dB$ a las frecuencias de máximo de $50Hz$ o de $400Hz$ siendo el mostrado en la Figura 11, equilibrando los dos picos extremos, la mejor opción.

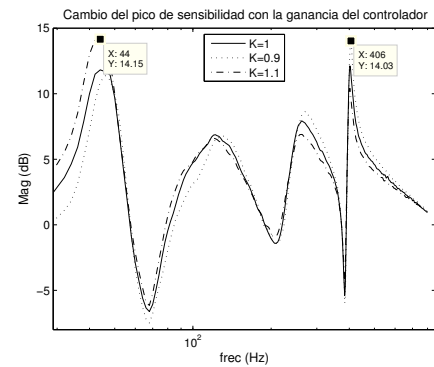


Figura 11. Función sensibilidad con un cambio del 10% en la ganancia del controlador.

Es importante darse cuenta de que la clasificación propuesta en el estándar ISO 14839-3 para vibración mecánica (ISO 2004), en cuanto a los valores de sensibilidad con respecto al comportamiento de la máquina no son completamente fiables en el *MBC500 Rotor Dynamics* ya que este estándar está previsto para máquinas de potencia superior a $15kW$, valor que no es alcanzado por este dispositivo. Sin embargo, la manera en la que se realizan las medidas y el tomar la sensibilidad como medida de robustez, es válido para el propósito de ajustar el controlador.

Dinámica del sistema con el PID ajustado. Los resultados experimentales obtenidos con el uso de este controlador son los que se observan en las figuras 7 y 8 en las que se aprecia un buen comportamiento hasta la velocidad de rotación crítica de aproximadamente $22000rpm$ en la que el sistema se desestabiliza por las causas mencionadas en la subsección 2.2.1.

Una vez obtenido un controlador para mantener la sustentación del eje, se estudia la atenuación de las vibraciones que se generan en rotación mediante control activo.

3.2 Control adaptativo para la atenuación de vibraciones

En la subsección 2.1 se ha mencionado que debido sobre todo a la descompensación de la masa en el rotor, existe un desequilibrio que causa una fuerza centrífuga sincrónica con la velocidad de rotación. Esta, al ser descompuesta en los ejes x e y , se traduce en un movimiento sinusoidal que se puede contrarrestar para conseguir una mayor precisión en el comportamiento de la máquina (Nonami and Liu 1999), (Shi et al. 2004), (Tamisier and Carrère 2004).

Para esto, se superpondrá a la señal de control, una señal en contrafase generada por un bloque adaptativo feedforward (Goodwin and Sin 1984). Además, para conseguir un mejor resultado, paliando errores entre la frecuencia de rotación medida y la real, se introduce también un lazo de enganche de frecuencia (FLL). El esquema de control resultante se muestra en la Figura 12, donde el vector $r(k)$ es la señal muestreada de $r(t) = [r_{x1}, r_{x2}, r_{y1}, r_{y2}]^T$ que será la referencia compuesta por las señales para cada uno de los cojinetes en las direcciones x e y en el extremo izquierdo (1) y en el derecho (2), y que en concreto, tal y como se realiza generalmente, se tomará nulo al diseñar el controlador adaptativo. La señal $d(t)$, representa la perturbación producida por el desequilibrio de las masas

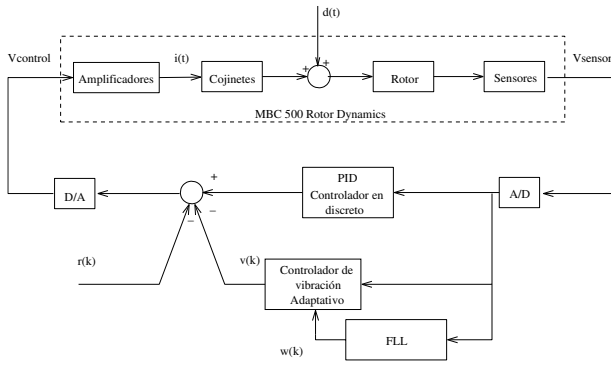


Figura 12. Esquema de control del sistema con el bloque adaptativo y FLL

que afecta a los desplazamientos en los ejes x e y . Por otro lado, están la velocidad de giro del rotor muestreada $\omega(k)$ y las señales $v(k)$ producidas por el bloque adaptativo para compensar las vibraciones. Será necesario pasar a continuo $v(k)$, obteniendo $v(t) = [v_{x1}, v_{x2}, v_{y1}, v_{y2}]^T$, para compensar el efecto perturbativo sobre x_{hall} y en consecuencia sobre el rotor. En esta subsección, los desplazamientos en las direcciones x e y en las posiciones de los sensores de efecto Hall se denotarán como $\bar{x}_{hall} = x(t) = [x_1, x_2, y_1, y_2]^T$ por simplicidad de notación.

De esta forma, siendo $x_1(t)$ la coordenada x del extremo izquierdo del rotor, la salida $v_{x1}(t)$ del control adaptativo será una onda sinusoidal dada por (15)

$$v_{x1}(t) = A_{x1} \sin(\omega t + \varphi_{x1}) \quad (15)$$

donde A_{x1} y φ_{x1} son parámetros que varían con el tiempo y que son actualizados por el algoritmo de adaptación. Esta ecuación también se puede escribir de la siguiente manera:

$$v_{x1}(t) = A_{1x1} \sin(\omega t) + A_{2x1} \cos(\omega t) \quad (16)$$

siendo ahora A_{1x1} y A_{2x1} los parámetros de adaptación. Señales análogas se obtienen para los dos cojinetes en x , (x_1, x_2) y en y , (y_1, y_2) .

El algoritmo de adaptación se implementa en discreto y sus parámetros se agrupan de la siguiente forma,

$$\theta_c(k) = [A_{1x1}(k), A_{2x1}(k), A_{1x2}(k), A_{2x2}(k), A_{1y1}(k), A_{2y1}(k), A_{1y2}(k), A_{2y2}(k)]^T$$

El objetivo del control adaptativo es ajustar el vector $\theta_c(k)$ de tal manera que el efecto del desequilibrio de las masas $d(t)$ sobre los desplazamientos $x(t)$ sea atenuado. La secuencia de datos de estas señales en los instantes de muestreo kT , donde k es un entero no negativo y T el periodo de muestreo se expresa como,

$$x(k) = G_D(q^{-1})d(k) + G_{CL}(q^{-1})v(k) \quad (17)$$

con q el operador desplazamiento tal y como se define en (Astrom and Wittenmark 1989), $d(k)$ y $v(k)$ las ristas de valores de las señales $d(t)$ y $v(t)$ respectivamente en cada instante de muestreo y $G_D(q^{-1})$ y $G_{CL}(q^{-1})$ las funciones

de transferencia discretas que relacionan $x(k)$ con $d(k)$ y $v(k)$ respectivamente.

Las señales $v(t)$ encargadas de compensar el efecto perturbativo sobre $x(t)$, son continuas mientras que los parámetros $\theta_c(k)$ asociados con la amplitud y fase de esas señales son actualizados en cada instante de muestreo por el algoritmo de adaptación que se presentará en la siguiente subsección.

Por otro lado, las señales de adaptación y en consecuencia el algoritmo de estimación, dependen de la frecuencia ω y del ruido, sucediendo que variaciones entre la medida y el comportamiento real, puedan llevar a una baja efectividad del algoritmo e incluso a problemas de estabilidad (Nonami and Liu 1999). Uno de los efectos experimentales observados al aplicar el algoritmo de compensación es que no se consigue reducir la vibración porque debido a que la frecuencia de la onda generada y la real no coinciden, se forma una interferencia que provoca vientes de gran amplitud peligrosos para el correcto funcionamiento de la máquina. Por esta razón, se ha introducido un lazo de enganche en frecuencia (FLL) (Arredondo and Jugo 2007) consiguiendo una mayor sincronización entre las señales sinusoidales usadas en la estructura de control y las medidas obtenidas de la rotación del eje evitando así el problema.

Algoritmo de estimación. El algoritmo de estimación, actualiza los parámetros de $\theta_c(k)$ de forma que las vibraciones en los extremos del eje sean minimizadas, siendo, por tanto, la solución ideal obtener $\theta_c(k)$ para que $x(k)$ sea cero en (18).

$$x(k) = G_D(q^{-1})d(k) + G_{CL}(q^{-1})\varphi(k)\theta_c(k) \quad (18)$$

donde

$$\varphi(k) = \begin{bmatrix} s_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_1 & c_1 \end{bmatrix}$$

con $s_1 = \sin \omega kT$ y $c_1 = \cos \omega kT$.

Sin embargo, como ésta no sería una solución realista pues $d(k)$ es desconocida, se obtendrán esos parámetros para minimizar el cuadrado de $x(k)$ en (18), que en este caso es el error.

Con el fin de resolver el problema de optimización propuesto se utiliza el siguiente algoritmo de mínimos cuadrados normalizado con matriz de covarianza constante (Goodwin and Sin 1984),

$$\theta_c(k) = \theta_c(k-1) + \frac{P \varphi(k)^T x(k)}{1 + \gamma \text{tr} [\varphi(k) P \varphi(k)^T]} \quad (19)$$

donde tr denota la traza de la matriz, $P \in \mathfrak{R}^{8 \times 8}$ es la matriz de covarianza y γ es un constante real. Estas dos deben ser tomadas de manera que el proceso de estimación sea mucho más lento que la dinámica del lazo cerrado descrita por $G_{CL}(q^{-1})$, para que el control adaptativo no interfiera con el PID (Shi *et al.* 2004), evitando así la posibilidad de que el sistema se vuelva inestable. Este algoritmo de

estimación asegura la acotación y la convergencia de los parámetros a valores constantes.

Resultados. Implementando en el DSP el control para mantener la estabilidad, el control activo, el control de velocidad necesario para conseguir la frecuencia de rotación deseada y el FLL, se obtienen los siguientes resultados que se presentan en las figuras 13 a 15.

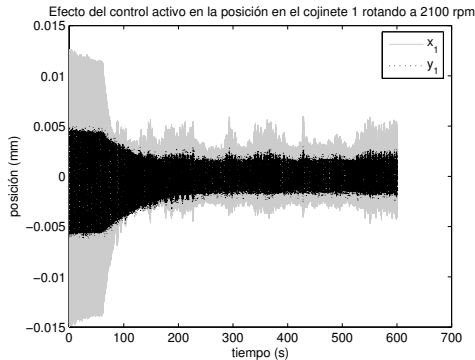


Figura 13. Evolución temporal de la reducción de vibración mediante el control activo sobre uno de los cojinetes

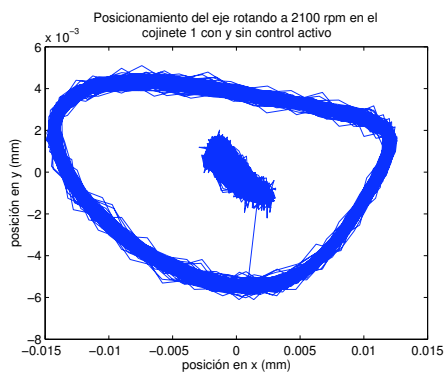


Figura 14. Reducción de la vibración conseguida mediante el control activo sobre uno de los cojinetes

En las figuras 13 y 14 se muestra la reducción de la vibración conseguida mediante el control activo experimentalmente, con el eje rotando a 2100rpm. Se observa una atenuación de alrededor del 75% para el eje x y del 60% para el y , pasados unos segundos tras su activación a los 60seg.

Por otro lado en la Figura 15 se representa la evolución temporal de los parámetros de adaptación quedando patente su convergencia a valores constantes.

Se han encontrado problemas a la hora de minimizar las vibraciones a mayores velocidades de rotación debido a la rapidez de cálculo exigida por el proceso y que es incapaz de ser aportada por el hardware. Esto es, el incremento de velocidad demanda un menor periodo de muestreo y una cada vez mayor precisión de la señal generada, que es incapaz de ser producida por el DSP utilizado.

4. CONCLUSIONES

En este artículo, se ha llevado a cabo un estudio sobre el modelado, control robusto y supresión de vibraciones de

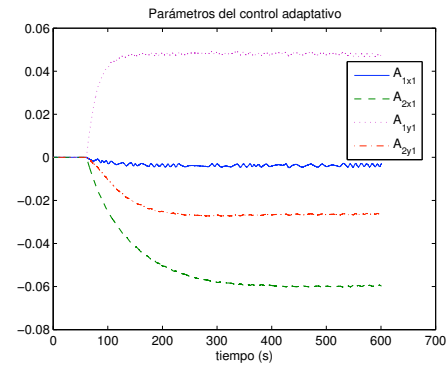


Figura 15. Evolución temporal de los parámetros de adaptación

un sistema de suspensión de un rotor mediante cojinetes magnéticos activos.

El modelado, que se presenta a grandes rasgos, pone de manifiesto características relevantes de un gran número de dispositivos basados en la misma tecnología como son el bajo amortiguamiento, las pronunciadas resonancias mecánicas, la fuerte no linealidad que poseen debido principalmente a la fuerza magnética o la simetría en el movimiento respecto a sus cojinetes.

La última de estas propiedades, permite calcular un controlador que garantiza la estabilidad de manera sencilla al permitir separar el sistema multivariable en varios sistemas de una entrada y una salida. Esto supone una gran ventaja ya que otorga la posibilidad de utilizar técnicas SISO de control.

Además, se ha realizado un análisis experimental de estabilidad del sistema, mediante el cual se ha ajustado el controlador obtenido de la manera más óptima posible siguiendo las indicaciones de la ISO 14839-3 que trata sobre el margen de estabilidad en máquinas con cojinetes magnéticos. La aplicación de las ideas de este estándar es posible ya que en el aparato sobre el que se realizan las pruebas, el acoplamiento entre las dinámicas de los ejes x e y es despreciable. Por otro lado, los valores propuestos en el estándar sobre las zonas de operación no son válidos del todo, como ya se aclara en el propio estándar, debido a que la máquina, por su baja potencia, no entra directamente dentro de lo estipulado para el mismo. Aún así, se observa que no es posible conseguir un controlador PID más robusto, mediante el cambio de sus ganancias, que el obtenido, dado que los cojinetes tienen una capacidad limitada de ejercer más fuerza sustentadora y funcionan al límite de sus posibilidades.

Este controlador PID ha sido imprescindible para garantizar la estabilidad, necesaria para realizar las medidas experimentales que permiten validar el modelo, pero a su vez, se ha requerido este modelo para diseñar el controlador en una primera fase, por lo que el éxito en las pruebas experimentales valida el proceso de modelado.

Es más, realizando un análisis no lineal en el dominio armónico sobre el modelo, se muestra que éste es capaz de explicar efectos no lineales observados experimentalmente. De esta manera queda patente que en el modelo están incluidos efectos complejos aun con las aproximaciones llevadas a cabo.

El control diseñado se ha probado experimentalmente con resultados satisfactorios consiguiendo alcanzar una velocidad máxima de rotación de aproximadamente 22000rpm. Por otro lado, se ha introducido un control adaptativo feedforward para la reducción de las vibraciones que se generan naturalmente debido, sobre todo, a la no coincidencia del eje de rotación y el centro de masas. Estas señales, que son sincronas con la velocidad de rotación, son compensadas por otras cuya amplitud y fase es determinada por el algoritmo de adaptación. De esta manera, para que exista una buena adecuación entre las dos señales, es fundamental que la señal de compensación y la que se genera naturalmente tengan la misma frecuencia. En el sistema a estudio, este hecho no se cumple debido al ruido y a que entre la frecuencia del rotor y lo que mide el encoder unido a la turbina existe una diferencia que a su vez es dependiente de esa velocidad de giro. Esta es la razón por la que se incluye un lazo de enganche en frecuencia que consigue corregir el error que se produce. De esta forma, implementando este control activo junto con el control de estabilidad, el control de velocidad y el FLL, se logra una reducción de la vibración de como mínimo un 60% a 2100rpm.

Dado que el esfuerzo de control es grande, es necesario un sistema de cómputo rápido y por tanto la optimización de recursos en este sentido es crucial a la hora de poner en marcha un sistema de cojinetes magnéticos con control de vibración activa. Es por esto, por lo que como siguiente paso de la investigación se propone el uso de técnicas de muestreo aleatorio y pseudoaleatorio en el control de vibración.

Todo el trabajo realizado sobre la maqueta de laboratorio, indica que las técnicas utilizadas pueden ser implementadas a nivel industrial para mejorar el rendimiento en aplicaciones de este tipo. En concreto, el fabricante de cabezales para máquina herramienta Goi-Alde Punteados de Precisión SL (Eibar) está en proceso de incorporar un cabezal levitado magnéticamente a su catálogo de productos industriales.

AGRADECIMIENTOS

Los autores están muy agradecidos al CICYT, la Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea y al Gobierno Vasco por la financiación de este trabajo mediante los proyectos DPI2002-04155-C02-01 y PTR95-0897.OP.CT, 9/UPV00224.310-15254/2003 y GIU06/04, y la beca de investigación predoctoral BF104.466, respectivamente.

REFERENCIAS

Ahn, H.J. and D.C. Han (2003). System modeling of an AMB spindle: Part I modeling and validation for robust control. *KSME International Journal* **17**, 1844–1854.

Arredondo, I. and J. Jugo (2007). Diseño e implementación de un FLL para su uso en control activo de máquinas de precisión con elementos rotantes. In: *XXVIII Jornadas de Automática*. Huelva (Spain).

Arredondo, I., J. Jugo and V. Etxebarria (2006). Modelling of a flexible rotor MagLev system. In: *Proceedings*

of 2006 American Control Conference. Minneapolis, Minnesota (USA).

Astrom, K.L. and B. Wittenmark (1989). *Adaptive Control*. Addison-Wesley. New York (USA).

Chen, M. and CR Knospe (2007). Control approaches to the suppression of machining chatter using active magnetic bearings. *IEEE Trans on Control Systems Technology* **15**, 220–232.

Childs, D. (1993). *Turbomachinery Rotordynamics: Phenomena, Modeling & Analysis*. Jon Wiley & Sons, Inc.. New York (USA).

Goodwin, G.C. and K.S. Sin (1984). *Adaptive Filtering, Prediction and Control*. Prentice-Hall, Inc.. Englewood Cliffs, New Jersey (USA).

Hu, T., Z. Lin and P. E. Allaire (2004). Reducing power loss in magnetic bearings by optimizing current allocation. *IEEE Trans on Magnetics* **40**, 1625–1635.

ISO, Standard. (2004). Mechanical vibration - Vibration of rotating machinery equipped with active magnetic bearings - part 3: Evaluation of stability margin. *ISO 14839-3:2006(E)*.

Jugo, J., I. Arredondo and V. Etxebarria (2005). Analysis and control design of MIMO systems based on symmetry properties. In: *Proceedings of 44th IEEE Conference on Decision and Control and 2005 European Control Conference*. Seville (Spain).

Jugo, J., I. Lizarraga and I. Arredondo (2006). Nonlinear analysis of an AMB system using harmonic domain LTV models. In: *Proceedings of IEEE International Conference on Control Applications*. Munich (Germany).

Kanemitsu, Y., X-B. Yong, S. Kijimoto and K. Matsuda (2006). Comparison of stability criteria for rotor levitated by active magnetic bearing. In: *Proceedings of the 10th International Symposium on Magnetic Bearings*. Martigny (Switzerland).

Kasarda, MEF. (2000). An overview of active magnetic bearing technology and applications. *The Shock and Vibration Digest* **32**, 91–99.

Knospe, CR. (2007). Active magnetic bearings for machining applications. *Control Engineering Practice* **15**, 307–313.

Lanzon, A. and P. Tsiotras (2002). Robust control of energy momentum wheels supported on active magnetic bearings using Hinf loop-shaping and mu-synthesis. In: *Proceedings of 15th Triennial World Congress*. Barcelona (Spain).

LaunchPoint (2002). *MBC500 Magnetic Bearing System Operating Instructions*. Goleta, CA (USA).

Li, G., H. Malsen and P. E. Allaire (2006). A note on ISO AMB stability margin. In: *Proceedings of the 10th International Symposium on Magnetic Bearings*. Martigny (Switzerland).

Maslen, E.H. and D.C. Meeker (1995). Fault tolerance of magnetic bearings by generalized bias current linearization. *IEEE Trans on Magnetics* **31**, 2304–2314.

Nonami, K. and Z. Liu (1999). Adaptive unbalance vibration control of magnetic bearing system using frequency estimation for multiple periodic disturbances with noise. In: *Proceedings of IEEE Conf. Control Applications*. Hawaii (USA).

Quinn, D.D., G. Mani, M.E.F. Kasarda, T. Bash, D.J. Inman and R.G. Kirk (2005). Damage detection of a rotating cracked shaft using an active magnetic

- bearing as a force actuator - analysis and experimental verification. *IEEE Trans on Mechatronics* **10**, 640–647.
- Schweitzer, G., H. Bleuler and A. Traxler (1994). *Active Magnetic Bearings: Basics, Properties and Applications of Active Magnetic Bearings*. vdf Hochschulverlag AG an der ETH Zürich. Zürich (Switzerland).
- Shi, J., R. Zmood and L. Qin (2004). Synchronous disturbance attenuation in magnetic bearing systems using adaptive compensating signals. *Control Engineering Practice* **12**, 283–290.
- Stephenson, D.A. and J.S. Agapionu (1996). *Metal Cutting Theory and Practice*. Marcel Dekker. New York (USA).
- Suyuan, Y., Y. Guojun, S. Lei and X. Yang (2006). Application and research of the active magnetic bearing in the nuclear power plant of high temperature reactor. In: *Proceedings of the 10th International Symposium on Magnetic Bearings*. Martigny (Switzerland).
- Tamisier, V. and F. Carrère (2004). Synchronous unbalance cancellation across critical speed using a closed-loop method. In: *Proceedings of the 10th International Symposium on Magnetic Bearings*. Mito (Japan).
- Untaroiu, A., H.G. Wood, P.E. Allaire, A.L. Throckmorton, S. Day, S.M. Patel, P. Ellman, C. Tribble and D.B. Olsen. (2005). Computational design and experimental testing of a novel axial flow LVAD. *ASAIO Journal* **51**, 702–710.
- Wagner, R.C., D.R. Boyle and K. Decker (2002). Evaluation and improvement of eddy current position sensors in magnetically suspended flywheel systems. In: *Proceedings of 37th Intersociety Energy Conversion Engineering Conference*. Washington D.C (USA).