

Procedimiento Geométrico para la Síntesis Automática de Prensiones con Equilibrio de Fuerzas de Cuatro Dedos sobre Objetos Poliédricos

Ricardo Prado* Raúl Suárez*

* Instituto de Organización y Control de Sistemas Industriales (IOC),
Universidad Politécnica de Cataluña (UPC) Av. Diagonal, 647, Barcelona,
España (sixto.ricardo.prado@upc.edu, raul.suarez@upc.edu)

Resumen: La síntesis de prensiones con equilibrio de fuerzas es uno de los problemas fundamentales en la prensión y manipulación de objetos mediante garras mecánicas. En este trabajo se presenta un método geométrico para determinar prensiones con equilibrio de fuerzas sobre objetos poliédricos. Primero se determinan los conjuntos de cuatro caras cuyas orientaciones y posiciones relativas permiten obtener prensiones con equilibrio de fuerzas (prensiones *concurrentes*, *flat-pencils* y *regulus*), a continuación, de entre estos conjuntos se selecciona para la prensión aquel que maximiza una medida de calidad y, finalmente, sobre el conjunto de caras seleccionado se determinan los puntos de contacto dedo-objeto tal que aseguren una prensión con equilibrio de fuerzas. El artículo incluye ejemplos y comparaciones de las prensiones obtenidas mediante este procedimiento con las óptimas en cada caso. Copyright © 2008 CEA.

Palabras Clave: Robótica, manos mecánicas, prensión con equilibrio de fuerzas.

1. INTRODUCCIÓN

Cuando una garra mecánica sujeta un objeto y es capaz de evitar que éste se mueva debido a fuerzas y momentos externos se dice que la prensión cumple con la propiedad de “*equilibrio de fuerzas*”, es decir, la prensión puede equilibrar cualquier fuerza y momento externo (esta propiedad es conocida en inglés como *force-closure*, y en castellano también se usa la traducción literal *cierre de fuerzas*) (Nguyen, 1988). Por lo tanto, planificar una prensión con equilibrio de fuerzas implica determinar un conjunto de puntos de contacto sobre el objeto tal que las fuerzas aplicadas por los dedos en esos puntos puedan contrarrestar cualesquiera otras fuerzas y momentos ejercidos sobre el objeto. Cuando se utilizan cuatro puntos de contacto las prensiones resultantes se clasifican en tres categorías (Ponce et al., 1993): *concurrentes*, *flat-pencils* y *regulus*. En una prensión *concurrente* las rectas de acción de las cuatro fuerzas de contacto se intersectan en un punto (Figura 1a); en una prensión *flat-pencil* las rectas de acción de dos fuerzas de contacto se intersectan en un punto y las de las otras dos en otro punto, con ambos puntos pertenecientes a la intersección de los dos planos definidos por cada par de rectas (Figura 1b); y en una prensión *regulus* las rectas de acción de las fuerzas no se intersectan, la distancia entre cualesquiera dos de ellas es igual a la distancia entre las otras dos, y además las proyecciones de cada par de rectas sobre un plano paralelo y equidistante a ellas debe generar una prensión *concurrente* o *flat-pencil* (Figura 1c).

En este artículo se propone un procedimiento puramente geométrico para generar de forma automática los tres tipos de prensiones con equilibrio de fuerza sobre objetos poliédricos; se considera que cada dedo contacta con una cara diferente del objeto con un contacto puntual y con fricción según el modelo de Coulomb. A diferencia de la mayoría de los trabajos previos

(Sundang y Ponce, 1995; Ponce et al., 1997; Zhu y Wang, 2003; Niparnan y Sudsang, 2004) el método que se propone no requiere linealizar el cono de fricción (el cono se considera de forma implícita en el procedimiento y por lo tanto de forma mas simple), no presenta procesos iterativos y todos los cálculos se realizan en un espacio de tres dimensiones. El procedimiento propuesto trabaja sobre caras del objeto convexas, por lo que las caras cóncavas se han de dividir en regiones convexas que son tratadas como caras independientes; con independencia de esta condición, el objeto puede ser cóncavo o convexo (e incluso puede tener huecos).

2. TRABAJOS RELACIONADOS

En esta sección se hace referencia a los trabajos previos más relevantes en la determinación de prensiones con equilibrio de fuerzas (en adelante PEF) con cuatro puntos de contacto sobre objetos poliédricos, no se discuten trabajos que tratan sobre objetos bidimensionales (por ejemplo Li, Jin y Liu (2003)) ni trabajos con menos de cuatro dedos (por ejemplo Prado y Suárez (2005)). Un procedimiento numérico para comprobar la existencia de una PEF ha sido propuesto por Zhu, Ding y Wang (2004), pero dejan como trabajo futuro su aplicación en la síntesis de prensiones. Sundang y Ponce (1995) propusieron un método para la construcción de prensiones *concurrentes*, *flat-pencils* y *regulus* sobre un conjunto dado de cuatro caras cuyas orientaciones relativas cumplen una condición suficiente, pero se asume que las posiciones relativas de estas caras permiten prensiones *flat-pencils* o *regulus*. Ponce et al. (1997) desarrollaron un método para construir prensiones *concurrentes* seleccionando primero los conjuntos de cuatro caras cuyas orientaciones y posiciones relativas permiten este tipo de prensión, para luego elegir el conjunto de caras que optimiza una función objetivo, sin embargo este método no genera prensiones *flat-pencils* ni *regulus* y trabaja en un espacio de dimensión 11.

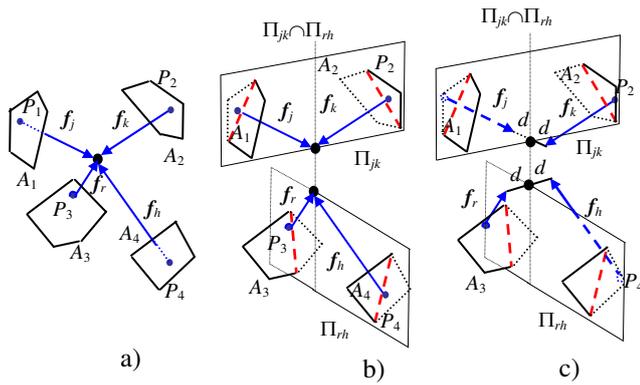


Figura 1. Los tres tipos de prensiones: a) *Concurrente*; b) *flat-pencil*; c) *regulus*.

Liu, Ding y Wang (1999) desarrollaron un algoritmo que, dados tres puntos de contacto que no determinan una PEF, determina la región de contacto en la que un cuarto punto asegura una PEF. Zhu y Wang (2003) introdujeron una nueva función para cuantificar la resistencia de una presión ante perturbaciones externas y la utilizaron para generar PEF con n puntos de contacto. Sin embargo el método requiere que el objeto no tenga huecos ni discontinuidades en la dirección de la normal a la superficie. Zhu y Ding (2004) mejoraron este método introduciendo algunos cambios que lo hacen más eficiente en tiempo de cálculo. Todos estos trabajos requieren la linealización del cono de fricción.

En otra línea, Niparnan y Sudsang (2004) propusieron método para determinar sólo prensiones *concurrentes* que requiere discretizar el objeto, con él se generan diferentes PEF para que posteriormente mediante alguna medida de calidad se seleccione la PEF más adecuada para una aplicación en particular. Estos autores también proponen otro enfoque basado en algoritmos genéticos (Phoka, Niparnan y Sudsang, 2006), para el cálculo de prensiones sobre objetos curvos con superficies continuas adecuadamente parametrizadas. Prado y Suárez (2006) presentaron un método geométrico para determinar prensiones *regulus* sobre conjuntos de cuatro caras cuyas orientaciones relativas satisfagan una condición necesaria y suficiente. El trabajo que se presenta aquí es bastante más general, ya que permite cualquier tipo de presión.

3. CONSIDERACIONES PREVIAS Y DESCRIPCIÓN GENERAL DEL MÉTODO

En el resto del artículo será de uso general la siguiente nomenclatura:

A_i : cara del objeto a ser contactada ($i=1,2,3,4$).

P_i : punto de contacto con fricción sobre A_i .

\mathbf{n}_i : vector unitario con dirección normal a A_i y apuntando hacia el interior del objeto.

μ : coeficiente de fricción (se considera constante).

$\alpha = \text{tg}^{-1}\mu$: semi-ángulo del cono de fricción ($\alpha < \pi/2$).

C_{f_i} : cono de fricción con semi-ángulo α , eje paralelo a \mathbf{n}_i y vértice en P_i .

C_i : cono de fricción con semi-ángulo α , eje paralelo a \mathbf{n}_i y vértice en el origen del sistema de referencia (representación de C_{f_i} en el espacio de fuerzas).

\mathbf{f}_i : fuerza de contacto aplicada en P_i .

L_i : recta soporte de \mathbf{f}_i .

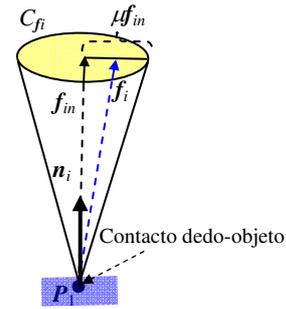


Figura 2. Cono de fricción C_{f_i} .

3.1 Equilibrio no-marginal y equilibrio de fuerzas

Con el fin de que el dedo apoyado en P_i no deslice sobre el objeto, la fuerza aplicada \mathbf{f}_i ha de estar dentro del cono de fricción C_{f_i} (Figura 2), es decir $\mathbf{f}_i \in C_{f_i}$, y

$$|\mathbf{f}_{it}| \leq \mu \mathbf{f}_{in} \quad (1)$$

donde \mathbf{f}_{in} y \mathbf{f}_{it} son, respectivamente, las componentes de \mathbf{f}_i normal y tangencial a la superficie del objeto. Cada fuerza \mathbf{f}_i produce sobre el objeto un momento $\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i$, siendo \mathbf{r}_i el vector que define la posición de P_i con respecto al centro de masa del objeto. Fuerza y momento se representan mediante un único vector $\mathbf{w}_i = (\mathbf{f}_i, \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i)^T$ de 6 dimensiones llamado *fuerza generalizada*.

Una presión es PEF si cualquier fuerza generalizada externa $\mathbf{w} = (\mathbf{f}, \mathbf{r} \times \mathbf{f})^T$ aplicada sobre el objeto puede ser contrarrestada por las fuerzas generalizadas aplicadas por n dedos, es decir:

$$\mathbf{w} + \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_i = \mathbf{0} \quad (2)$$

Si una presión permite el equilibrio de fuerzas en ausencia de perturbaciones, es decir:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{w}_i = \mathbf{0} \quad (3)$$

y cada \mathbf{f}_i está estrictamente incluida en C_{f_i} (\mathbf{f}_i no pertenece a los límites de C_{f_i}) entonces se dice que la presión alcanza el *equilibrio no-marginal*. Nguyen (1988) ha mostrado que alcanzar el equilibrio no-marginal es una condición necesaria y suficiente para que una presión sea PEF. Es decir, si una presión permite aplicar $\mathbf{f}_i \in C_{f_i}$ tal que las \mathbf{w}_i satisfacen la ecuación (3) entonces la presión también permite aplicar \mathbf{f}_i cuyas correspondientes \mathbf{w}_i satisfacen la ecuación (2) para $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$. Posteriormente, Ponce et al. (1993) han demostrado que si cuatro fuerzas de contacto expanden \mathfrak{R}^3 y sus rectas de acción cumplen las condiciones de una presión *concurrente*, *flat-pencil* o *regulus* entonces la presión alcanzan el equilibrio no-marginal y por tanto es una PEF. Esta condición se usa en este trabajo para determinar los conjuntos de caras que permiten obtener una PEF.

3.2 Descripción general del método

El método propuesto comienza por seleccionar los conjuntos de caras que permiten obtener al menos un tipo de PEF (*concurrente*, *flat-pencil* o *regulus*). Esta selección se realiza en dos fases, en la primera se eligen los conjuntos de caras cuyas orientaciones relativas permiten una PEF, y de entre ellas, en la

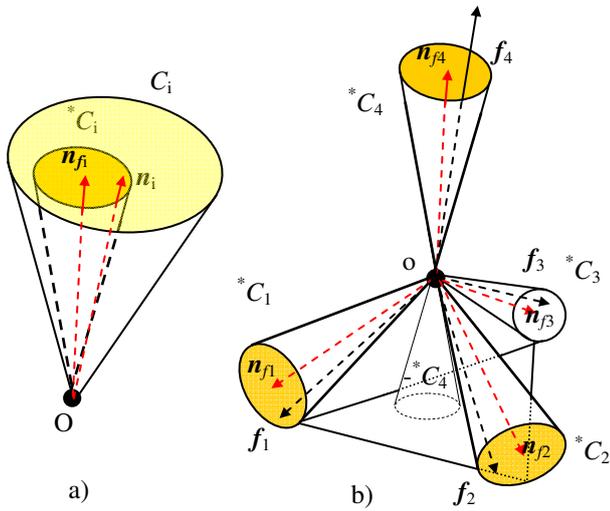


Figura 3. a) Ejemplo de $*C_i \subseteq C_i$; b) si $f_i \in *C_i$, $i=1,2,3,4$, entonces las cuatro f_i expanden \mathcal{R}^3 .

segunda fase se seleccionan los conjuntos cuyas posiciones relativas también lo permiten. Los conjuntos de caras seleccionados se evalúan luego según una medida de calidad que considera las posiciones relativas de las caras, su localización con respecto al centro de masa del objeto, y el grado de similitud de los módulos de las fuerzas de contacto cuando $w=0$. Para realizar la prensión se selecciona el conjunto de caras de mayor calidad. Finalmente, sobre las caras seleccionadas se determinan las posiciones P_i , $i=1,2,3,4$, que aseguran una PEF, con el centroide del tetraedro que definen cercano al centro de masa del objeto, lo que produce mejores resultados frente a fuerzas y momentos gravitacionales e inerciales.

4. SELECCIÓN DE CONJUNTOS DE CARAS QUE PERMITEN UNA PEF

Los apartados siguientes describen las dos fases del procedimiento de selección de los conjuntos de cuatro caras que permiten una PEF.

4.1 Selección de caras según su orientación

En esta fase se seleccionan todos los conjuntos de cuatro caras cuyas orientaciones relativas permiten que las fuerzas aplicadas $f_i \in C_i$, $i=1,2,3,4$, expandan \mathcal{R}^3 . Posteriormente, en cada cara se determina un subconjunto $*C_i$ del cono C_i (Figura 3a) tal que si $f_i \in *C_i$, $i=1,2,3,4$, entonces las cuatro fuerzas f_i $i=1,2,3,4$, expanden \mathcal{R}^3 (Figura 3b).

Sea $ConvexHull(e_1, \dots, e_4)$ la función que devuelve el casco convexo que engloba los puntos definidos por los elementos geométricos (e_1, \dots, e_4) (de Berg *et al.*, 2000). Para que $f_i \in C_i$, $i=1,2,3,4$, expandan \mathcal{R}^3 es condición suficiente que $0 \in ConvexHull(n_1, n_2, n_3, n_4)$ (Ponce *et al.*, 1993) (Figura 4a). Por lo tanto, todos los conjuntos de caras que cumplen esta condición son directamente seleccionados como candidatos para una PEF.

Debido a la fricción, también existen conjuntos de caras con $0 \notin ConvexHull(n_1, n_2, n_3, n_4)$ (Figura 4b) que permiten aplicar fuerzas $f_i \in C_i$, $i=1,2,3,4$, que expanden \mathcal{R}^3 . Estos conjuntos también son considerados como candidatos para una PEF, y se determinan verificando que cumplan las condiciones descritas en la siguiente proposición.

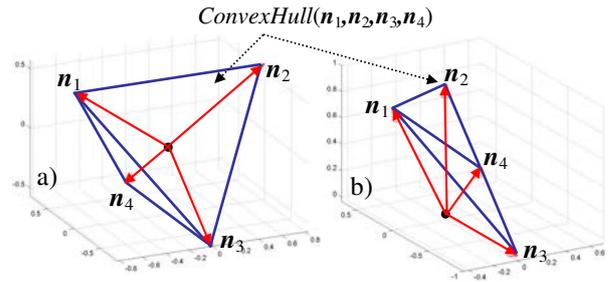


Figura 4. a) Normales que expanden \mathcal{R}^3 ; b) Normales que no expanden \mathcal{R}^3 pero permiten fuerzas que si lo hacen.

Sean:

Π_i el plano que contiene el origen y es paralelo a la cara de $ConvexHull(n_1, n_2, n_3, n_4)$ más cercana al origen (Figura 5a).

φ el ángulo entre Π_i y cualquiera de las tres normales n_i que lo determinan (φ es igual para cada n_i).

v_{il} y v_{ir} los dos vectores unitarios que indican las direcciones extremas de $\Pi_i \cap C_i$, $i=1,2,3,4$ (Figura 5b). Nótese que v_{il} y v_{ir} no existen cuando $\Pi_i \cap C_i = \emptyset$ y que $v_{il} = v_{ir}$ cuando Π_i es tangente a C_i .

Proposición 1. Dadas cuatro caras del objeto tal que $0 \notin ConvexHull(n_1, n_2, n_3, n_4)$, $\exists f_i \in C_i$, $i=1,2,3,4$ que expanden \mathcal{R}^3 si y sólo si:

1. $\varphi < \alpha$.
2. $0 \in ConvexHull(v_{1l}, v_{1r}, v_{2l}, v_{2r}, v_{3l}, v_{3r}, v_{4l}, v_{4r})$ ■

Demostración.

Si $\varphi \geq \alpha$ entonces los cuatro conos C_i están incluidos en uno de los semi-espacios de \mathcal{R}^3 definidos por Π_i , esto implica que ningún vector del otro semi-espacio puede obtenerse mediante una combinación lineal positiva de cuatro vectores pertenecientes respectivamente a C_i , $i=1,2,3,4$. Por lo tanto, si $\varphi \geq \alpha$ las orientaciones relativas de las caras no permiten aplicar $f_i \in C_i$, $i=1,2,3,4$, que expandan \mathcal{R}^3 .

Si $0 \notin ConvexHull(v_{1l}, v_{1r}, v_{2l}, v_{2r}, v_{3l}, v_{3r}, v_{4l}, v_{4r})$ entonces el plano Π_i no puede ser expandido por una combinación lineal positiva de cuatro vectores pertenecientes respectivamente a cada C_i , y por lo tanto no se pueden obtener algunos vectores de \mathcal{R}^3 , lo que implica que las orientaciones relativas de las caras no permiten aplicar $f_i \in C_i$, $i=1,2,3,4$, que expandan \mathcal{R}^3 .

Si $0 \in ConvexHull(v_{1l}, v_{1r}, v_{2l}, v_{2r}, v_{3l}, v_{3r}, v_{4l}, v_{4r})$ entonces el plano Π_i puede obtenerse mediante una combinación lineal de las componentes sobre Π_i de cuatro vectores pertenecientes respectivamente a C_i , $i=1,2,3,4$, y si al mismo tiempo $\varphi < \alpha$ entonces pueden existir componentes de fuerzas en los dos semi-espacios definidos por Π_i ; esto implica que se puede obtener cualquier vector de \mathcal{R}^3 mediante una combinación lineal positiva de cuatro vectores pertenecientes respectivamente a C_i , $i=1,2,3,4$. Por lo tanto las orientaciones relativas de las caras permiten aplicar $f_i \in C_i$, $i=1,2,3,4$, que expandan \mathcal{R}^3 . ■

Nótese entonces que un conjunto de caras que permite aplicar $f_i \in C_i$, $i=1,2,3,4$, que expanden \mathcal{R}^3 y permiten una PEF, puede tener normales n_i que expandan o no \mathcal{R}^3 . Los métodos existentes para determinar PEF con cuatro puntos de contacto mencionados en la Sección 2 sólo son aplicables en conjuntos de caras cuyas n_i expanden \mathcal{R}^3 , dejando sin resolver los demás casos, mientras que aquí se consideran todos los casos.

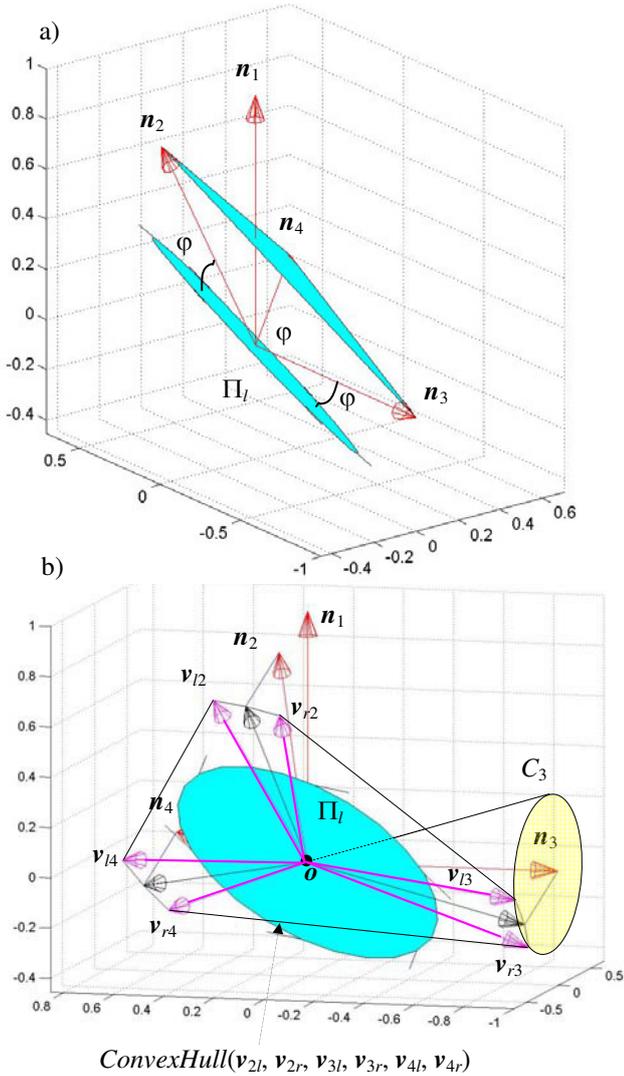


Figura 5. a) Plano Π_l , definido en este caso por \mathbf{n}_2 , \mathbf{n}_3 y \mathbf{n}_4 ; b) vectores \mathbf{v}_{12} , \mathbf{v}_{22} , \mathbf{v}_{32} , \mathbf{v}_{42} y \mathbf{v}_{14} , \mathbf{v}_{24} , \mathbf{v}_{34} , \mathbf{v}_{44} (sólo se dibuja completo el cono C_3).

*Determinación de los conos *C_i*

Para su uso posterior en la determinación de una PEF cuando las orientaciones de las caras lo permitan, se calcula un cono ${}^*C_i \subseteq C_i$, $i=1,2,3,4$, tal que si $\mathbf{f}_i \in {}^*C_i$ entonces las cuatro fuerzas \mathbf{f}_i expanden \mathcal{R}^3 , y por lo tanto aseguran el equilibrio de fuerzas. Para obtener *C_i se calculan cuatro triedros T_i , $i=1,2,3,4$, tal que cualesquiera cuatro vectores pertenecientes uno a cada T_i siempre expandan \mathcal{R}^3 (Figura 6a). $T_i \cap C_i$, $i=1, \dots, 4$, contiene entonces el conjunto buscado de direcciones de fuerza alcanzables físicamente que aseguran el equilibrio de fuerzas (Figura 6b), y a fin de simplificar su manipulación, se hace una aproximación conservadora y se toma *C_i como el mayor cono contenido en $T_i \cap C_i$.

El procedimiento utilizado para calcular T_i asegura, para las caras que han pasado la selección según su orientación, que $T_i \cap C_i$ es siempre un conjunto no nulo. En primer lugar se seleccionan cuatro vectores unitarios auxiliares ${}^*n_i \in C_i$, $i=1,2,3,4$, cuyos extremos no sean coplanares (el proceso de selección de estos vectores se detalla mas adelante). Posteriormente se definen los cuatro planos Π_{jkr} ,

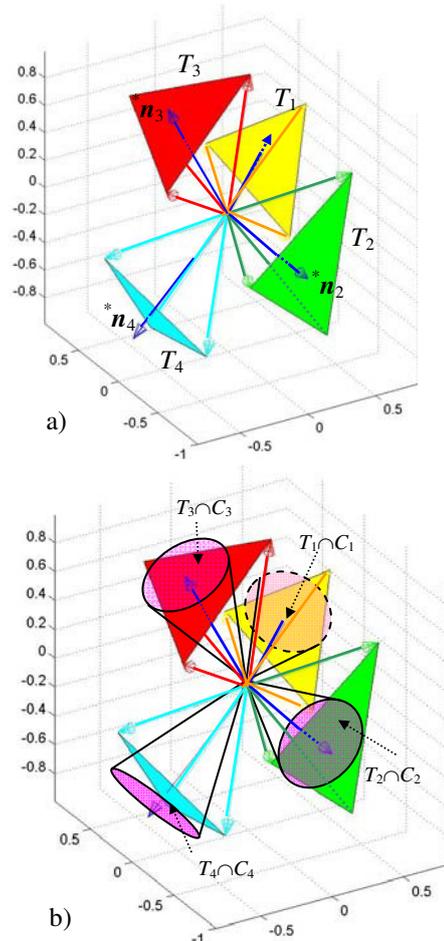


Figura 6. Ejemplos de: a) triedros T_i ; b) $T_i \cap C_i$.

$\{j,k,r\} \subset \{1,2,3,4\}$, que contienen al origen y son paralelos al triángulo definido por los extremos de *n_j , *n_k y *n_r (Figura 7). Nótese que como los extremos de *n_i , $i=1,2,3,4$, no son coplanares siempre existen cuatro Π_{jkr} diferentes. Cada plano Π_{jkr} define dos semi-espacios ${}^+S_i$ y ${}^-S_i$, $i \in \{1,2,3,4\}$ e $i \neq j \neq k \neq r$, asumiendo por convención que ${}^*n_i \in {}^+S_i$ (por ejemplo en la Figura 7 el plano Π_{234} determinado por *n_2 , *n_3 y *n_4 define los semi-espacios ${}^+S_1$ y ${}^-S_1$, con ${}^*n_1 \in {}^+S_1$). Entonces $T_i = {}^+S_i \cap {}^-S_j \cap {}^-S_k \cap {}^-S_r$ siempre es un cono poliédrico convexo de tres caras con vértice en el origen y con cada cara sobre un plano Π_{ijk} , $i=1, \dots, 4$ y $j,k \in \{1,2,3,4\}$ con $i \neq j \neq k$ (la Figura 8 muestra un ejemplo).

Puesto que los cuatro conos poliédricos convexos T_i se determinan a partir de los cuatro planos Π_{jkr} , $\{i,j,k,r\} = \{1,2,3,4\}$, entonces los tres lados del negado de T_i , representado como $-T_i$, son respectivamente un lado de T_j , T_k y T_r . Esto implica que cualquier vector de $-T_i$ puede obtenerse mediante una combinación lineal positiva de tres vectores pertenecientes a T_j , T_k y T_r , respectivamente. Por lo tanto, cualesquiera cuatro vectores pertenecientes a T_i , $i=1,2,3,4$, respectivamente, siempre expanden \mathcal{R}^3 .

Para completar el procedimiento queda por describir el proceso de selección de los vectores unitarios iniciales ${}^*n_i \in C_i$, $i=1,2,3,4$, con extremos no-coplanares para asegurar $T_i \cap C_i \neq \emptyset$. Estos vectores pueden ser cualesquiera dentro de los respectivos conos C_i , pero, por un lado, cuanto más lejos estén de ser coplanares mayor será el triedro T_i , y por otro, cuanto más centrados estén

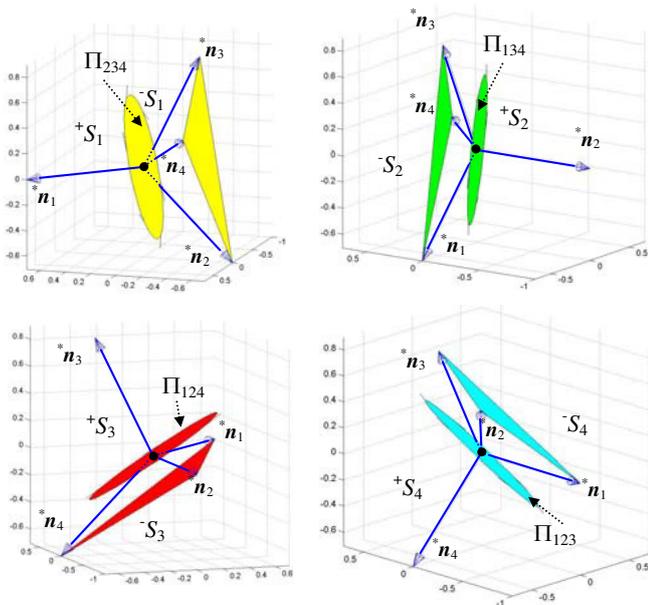


Figura 7. Determinación de los planos Π_{jkr} y sub-espacios $\pm S_i$.

en el cono C_i tanto más centrado lo estará la intersección $T_i \cap C_i$. Esto lleva a los siguientes criterios de selección de $\pm n_i$:

Caso de extremos de $n_i, i=1,2,3,4$, no-coplanares (Figura 9a): se toma directamente $\pm n_i = n_i$.

Caso de extremos de $n_i, i=1,2,3,4$, coplanares (Figura 9b): se determinan las dos porciones, ${}^+C_i$ y ${}^-C_i$, de C_i separadas por el plano Π_i , y en cada una de ellas se determina los vectores unitarios, ${}^+n_i$ y ${}^-n_i$, con dirección del eje del mayor cono contenido en ${}^+C_i$ y ${}^-C_i$ respectivamente (nótese que al ser los vectores n_i coplanares, Π_i es el plano que los contiene y los volúmenes de ${}^+C_i$ y ${}^-C_i$ son iguales). Entonces, se toman como vectores $\pm n_i, \pm n_j, \pm n_k$ y $\pm n_r, \{i,j,k,r\}=\{1,2,3,4\}$, aquellos que generan el $ConvexHull(\pm n_i, \pm n_j, \pm n_k \text{ y } \pm n_r)$ de mayor volumen, donde “ \pm ” significa “+” ó “-”.

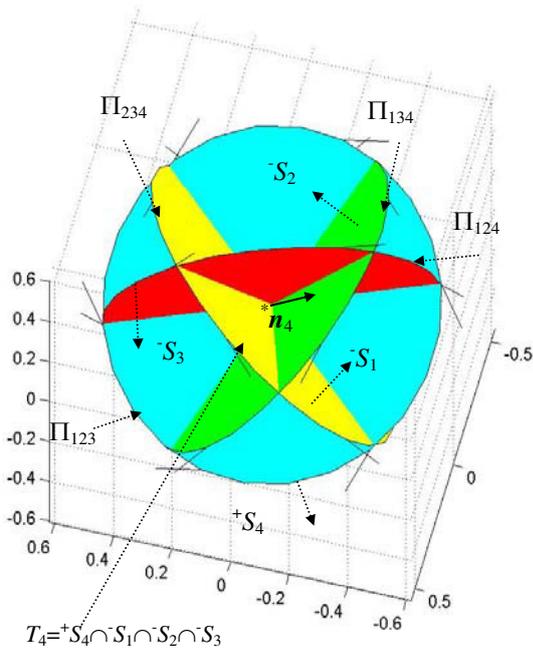


Figura 8. Ejemplo de cono convexo poliédrico de tres caras $T_4 = {}^+S_4 \cap S_1 \cap S_2 \cap S_3$.

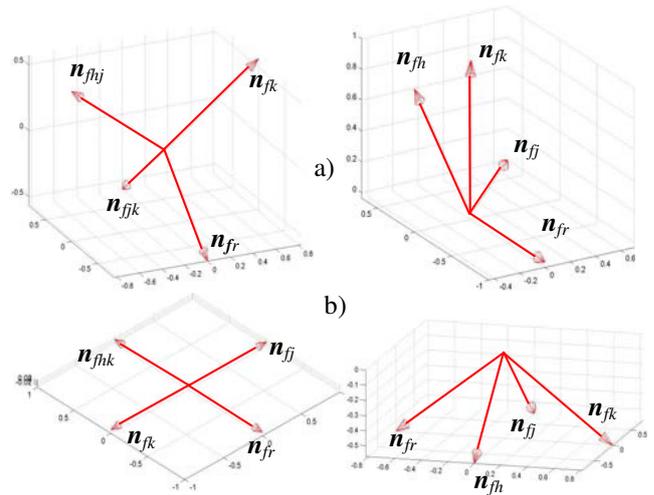


Figure 9. a) Dos casos donde los extremos n_i son no-coplanares; b) dos casos donde los extremos de n_i son coplanares.

Al final de esta fase, para cada conjunto de caras cuyas orientaciones permiten una PEF se tienen conos de direcciones ${}^*C_i \subseteq C_i, i=1,2,3,4$, tal que si $f_i \in {}^*C_i$ entonces las cuatro fuerzas f_i expanden \mathfrak{R}^3 y por lo tanto aseguran el equilibrio de fuerzas, como en el ejemplo de la Figura 3.

4.2 Selección de caras según su posición

En esta fase se seleccionan, entre aquellos que pasan la fase previa, los conjuntos de caras cuyas posiciones relativas permiten alcanzar una PEF con las direcciones de fuerza aplicables en *C_i .

Con el fin de tener un amplio rango de variación de las direcciones de f_i para mantener el equilibrio de fuerzas en presencia de perturbaciones externas ($w \neq 0$), se considera deseable que f_i esté alineada con el eje, n_{fi} , de *C_i cuando $w=0$, por lo tanto en esta fase se seleccionan los conjuntos de caras que permiten alcanzar el equilibrio con f_i en la dirección de n_{fi} . Dado que ${}^*C_i \subseteq C_i$ entonces, por construcción, una fuerza f_i con la dirección de n_{fi} nunca está en el límite del cono de fricción C_i (asegurando con ello el equilibrio no-marginal y por lo tanto el equilibrio de fuerzas -Sección 3.1-). Nótese entonces que los conjuntos de caras que permiten una PEF pero no permiten alcanzar el equilibrio con f_i con la dirección de n_{fi} no son seleccionados para la presión (en general estos conjuntos alcanzan el equilibrio con fuerzas de contacto muy cercanas a los límites del cono de fricción).

A continuación se describen las condiciones usadas para determinar los conjuntos de cuatro caras $A_i, i=1,2,3,4$, que permiten una PEF para cada tipo de presión. Debe destacarse que si un conjunto de cuatro caras permite una presión concurrente con los puntos de contacto estrictamente en el interior de cada cara (es decir, los contactos no se producen sobre las aristas del objeto), entonces sobre el mismo conjunto de caras siempre existen prensiones *flat-pencils* y *regulus*, y los tres tipos de prensiones pueden obtenerse usando las mismas direcciones de fuerzas cambiando solamente los puntos de contacto (Ponce et al., 1993). Análogamente, si un conjunto de caras permite una presión *flat-pencil* también permite prensiones *regulus*.

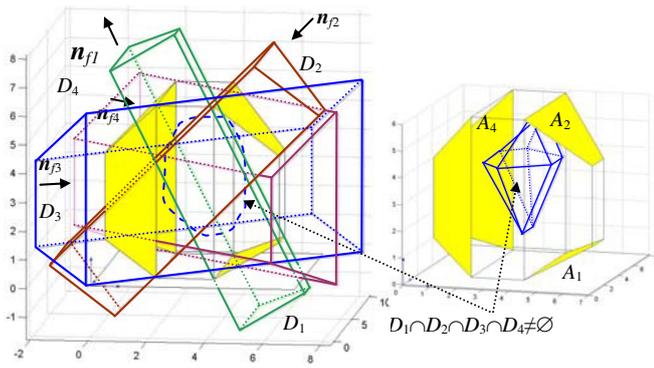


Figura 10. Conjunto de caras con $D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap D_4 \neq \emptyset$.

Sea D_i el volumen barrido por la cara A_i cuando se desplaza en la dirección de \mathbf{n}_{fi} , $i=1,2,3,4$. D_i es el conjunto de todas las posibles rectas L_i cuando se aplica \mathbf{f}_i con la dirección de \mathbf{n}_{fi} .

Caso A: Conjuntos de caras que permiten presiones concurrentes, flat-pencils y regulus.

Una presión *concurrente* requiere que las fuerzas aplicadas intersecten en un punto, es decir $L_1 \cap L_2 \cap L_3 \cap L_4 \neq \emptyset$, y como por cada punto de D_i pasa una potencial recta L_i , entonces un conjunto de caras es *válido* para determinar una presión *concurrente* si $D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap D_4 \neq \emptyset$ (Figura 10).

Caso B: Conjuntos de caras que permiten sólo presiones flat-pencils y regulus.

Una presión *flat-pencil* requiere que un par de fuerzas intersecten en un punto y el otro par fuerzas intersecten en otro punto, es decir $L_j \cap L_k = P_{jk}$, y $L_r \cap L_h = P_{rh}$, $\{j,k,r,h\} = \{1,2,3,4\}$, con ambos puntos pertenecientes a la intersección de los dos planos definidos por cada par de fuerzas, lo que implica que $P_{jk} \in \Pi_{jk} \cap \Pi_{rh}$ y $P_{rh} \in \Pi_{jk} \cap \Pi_{rh}$, siendo Π_{jk} y Π_{rh} los planos que contienen a L_j y L_k , y a L_r y L_h respectivamente. Sin conocer los puntos de contacto, los puntos P_{jk} y P_{rh} , no son conocidos, pero el vector \mathbf{n}_l que indica la dirección de la recta que pasa por ellos sí puede obtenerse a partir de las direcciones \mathbf{n}_{fi} de las fuerzas \mathbf{f}_i , como $\mathbf{n}_l = (\mathbf{n}_{fj} \times \mathbf{n}_{fk}) \times (\mathbf{n}_{fr} \times \mathbf{n}_{fh})$ (nótese que $\mathbf{n}_{fj} \times \mathbf{n}_{fk}$ da la normal a Π_{jk} y $\mathbf{n}_{fr} \times \mathbf{n}_{fh}$ da la normal a Π_{rh}).

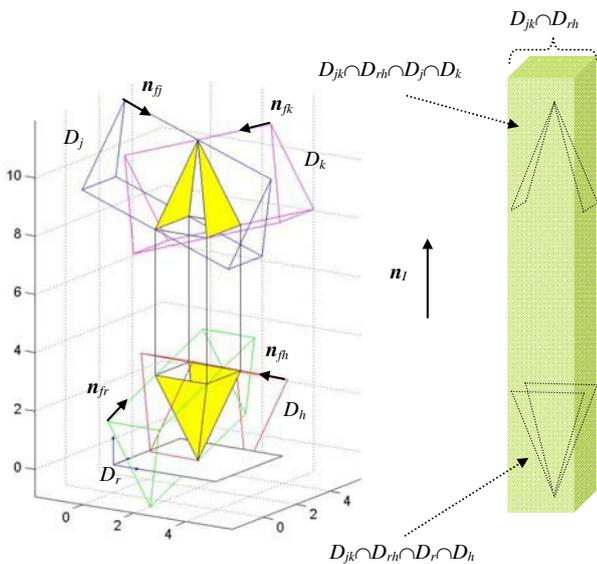


Figura 11. Conjunto de caras que permiten presiones *flat-pencil* y *regulus*.

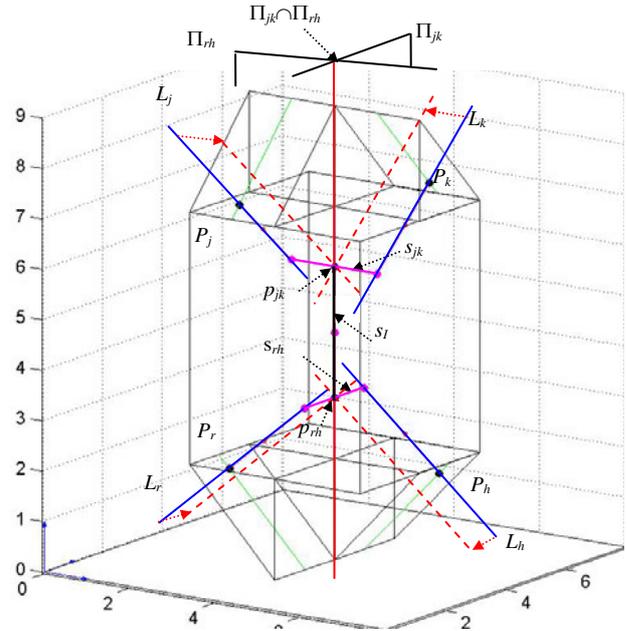


Figura 12. Puntos de contacto que cumplen con $P_{jk} P_{rh}$ y $\|s_{jk}\| = \|s_{rh}\|$.

Recordando que por cada punto de D_i pasa una potencial recta L_i con la dirección de \mathbf{n}_{fi} , un conjunto de caras es *válido* para determinar presiones *flat-pencil* si se cumplen las siguientes dos condiciones:

1. $D_j \cap D_k \neq \emptyset$ y $D_r \cap D_h \neq \emptyset$, $\{j,k,r,h\} = \{1,2,3,4\}$, lo que permite que $L_j \cap L_k \neq \emptyset$ y $L_r \cap L_h \neq \emptyset$ (Figura 11).
2. $D_{jk} \cap D_{rh} \neq \emptyset$, siendo D_{jk} y D_{rh} los volúmenes barridos por $D_j \cap D_k$ y $D_r \cap D_h$, respectivamente, cuando se desplazan en la dirección de \mathbf{n}_l , lo que permite $P_{jk} \in \Pi_{jk} \cap \Pi_{rh}$ y $P_{rh} \in \Pi_{jk} \cap \Pi_{rh}$.

Caso C: Conjuntos de caras que permiten sólo presiones regulus.

Una presión *regulus* requiere que la distancia entre cualesquiera dos rectas de acción de fuerza L_j y L_k sea no nula e igual a la distancia entre las otras dos L_r y L_h , $\{j,k,r,h\} = \{1,2,3,4\}$ (Figura 12), y además las proyecciones de cada par de rectas sobre un plano paralelo y equidistante a ellas debe generar una presión *concurrente* o *flat-pencil*.

Sean:

- Π_{jk} el plano paralelo y equidistante a L_j y L_k .
- Π_{rh} el plano paralelo y equidistante a L_r y L_h .
- $\mathbf{n}_l = (\mathbf{n}_{fj} \times \mathbf{n}_{fk}) \times (\mathbf{n}_{fr} \times \mathbf{n}_{fh})$ un vector unitario paralelo a $\Pi_{jk} \cap \Pi_{rh}$.
- s_{jk} el segmento mas corto entre L_j y L_k ($s_{jk} \perp \Pi_{jk}$).
- s_{rh} el segmento mas corto entre L_r y L_h ($s_{rh} \perp \Pi_{rh}$).
- p_{jk} el punto medio de s_{jk} (nótese que $p_{jk} \in \Pi_{jk}$).
- p_{rh} el punto medio de s_{rh} (nótese que $p_{rh} \in \Pi_{rh}$).
- s_l el segmento $\overline{p_{jk} p_{rh}}$.

Nótese que a priori únicamente se conoce \mathbf{n}_l , que depende sólo de las direcciones de L_j , L_k , L_r y L_h que son conocidas aunque no se conozcan los puntos de aplicación de las fuerzas.

De los requerimientos de una presión *regulus* se desprenden las siguientes condiciones necesarias: por un lado que $\|s_{jk}\| = \|s_{rh}\|$, y, por otro, para que la proyección de L_j y L_k sobre Π_{jk} y de L_r y L_h sobre Π_{rh} permitan una presión *concurrente* o *flat-pencil* debe cumplirse que $s_l \subset \Pi_{jk} \cap \Pi_{rh}$ y por lo tanto $s_l \parallel \mathbf{n}_l$ (nótese que p_{jk} y p_{rh} se corresponden con P_{jk} y P_{rh} en el Caso B).

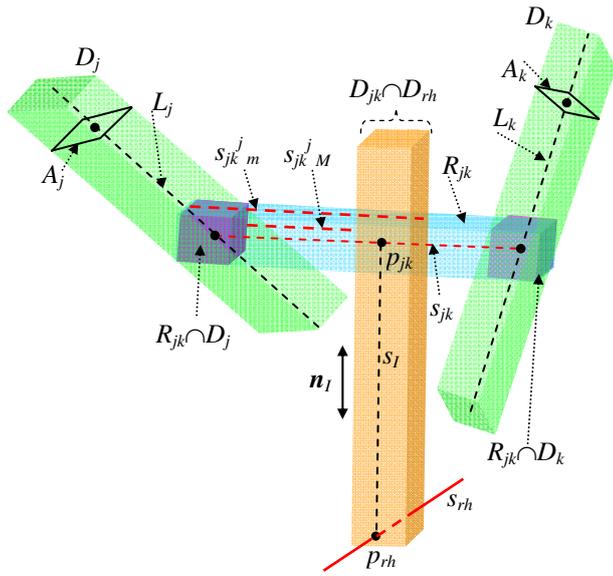


Figura 13. Elementos usados en el proceso de selección de un conjunto de caras que sólo permite prensiones *regulus* (sólo se muestran los elementos geométricos asociados a las caras A_j y A_k).

Con la información disponible puede construirse:

R_{jk} , la región formada por todos los segmentos perpendiculares a Π_{jk} y cuyos extremos están contenidos en D_j y D_k respectivamente (Figura 13); R_{jk} contiene siempre a s_{jk} .

R_{rh} , la región formada por todos los segmentos perpendiculares a Π_{rh} y cuyos extremos están contenidos en D_r y D_h respectivamente; R_{rh} contiene siempre a s_{rh} .

D_{jk} y D_{rh} , los volúmenes barridos por R_{jk} y R_{rh} respectivamente, cuando se desplazan en la dirección de n_l .

y con estos elementos se puede evaluar:

$s_{jk_m}^j, s_{jk_M}^j, s_{jk_m}^k$ y $s_{jk_M}^k$, las mínimas y máximas distancias (indicadas por los subíndices m y M respectivamente) entre $R_{jk} \cap D_j$ y $R_{jk} \cap D_{jk} \cap D_{rh}$ y entre $R_{jk} \cap D_k$ y $R_{jk} \cap D_{jk} \cap D_{rh}$ (indicadas por los supraíndices j y k respectivamente) medidas según la dirección de s_{jk} (Figura 14).

$s_{rh_m}^r, s_{rh_M}^r, s_{rh_m}^h$ y $s_{rh_M}^h$, las distancias equivalentes para el caso de las caras r y h , medidas según la dirección de s_{rh} .

$s_M = \text{máximo}(s_{jk_M}^j, s_{jk_M}^k, s_{rh_M}^r, s_{rh_M}^h)$ (Figura 14); es decir s_M es el máximo mínimo.

$s_m = \text{mínimo}(s_{jk_m}^j, s_{jk_m}^k, s_{rh_m}^r, s_{rh_m}^h)$ (Figura 14); es decir s_m es el mínimo máximo.

Con esta información, un conjunto de caras es *válido* para determinar prensiones *regulus* si se cumplen las siguientes dos condiciones:

1. $D_{jk} \cap D_{rh} \neq \emptyset$, (Figura 13).

Si $D_{jk} \cap D_{rh} = \emptyset$ entonces ningún segmento paralelo a n_l interseca con R_{jk} y R_{rh} , y por lo tanto tampoco con s_{jk} y s_{rh} , y dado que el segmento s_l interseca con s_{jk} y s_{rh} entonces s_l no es paralelo a n_l , incumpliendo la condición necesaria $s_l // n_l$ indicada anteriormente.

2. $s_M < s_m$ (Figura 14).

Si $s_m < s_M$ entonces la distancia entre cualesquiera dos rectas incluidas en D_j y D_k respectivamente con el plano paralelo y

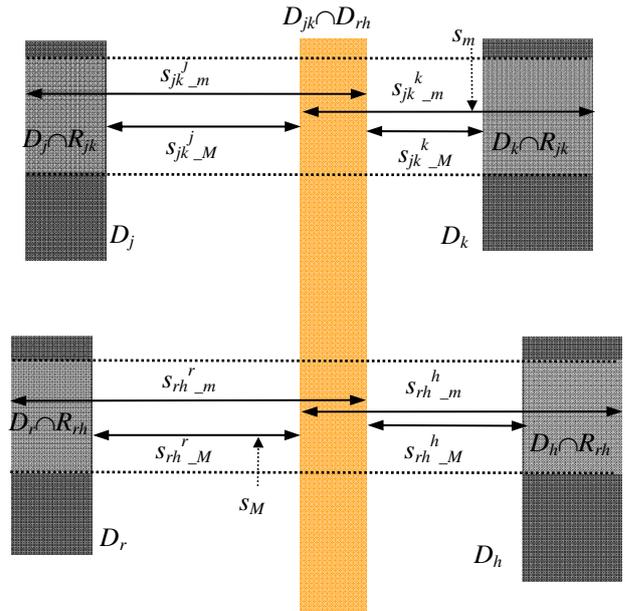


Figura 14. Ilustración conceptual de la determinación de s_M y s_m .

equidistante a las mismas intersectando a $D_{jk} \cap D_{rh}$ es siempre diferente a la distancia entre cualesquiera dos rectas incluidas en D_r y D_h con el plano paralelo y equidistante a las mismas intersectando a $D_{jk} \cap D_{rh}$. Por lo tanto dado que $L_i < D_i$, $i=1,2,3,4$, la distancia entre L_j y L_k es siempre diferente de la distancia entre L_r y L_h , incumpliendo la condición necesaria $\|s_{jk}\| = \|s_{rh}\|$ indicada anteriormente.

Si $D_{jk} \cap D_{rh} \neq \emptyset$ entonces $D_{jk} \cap D_{rh} \cap R_{jk} \neq \emptyset$ y $D_{jk} \cap D_{rh} \cap R_{rh} \neq \emptyset$, por lo tanto $D_{jk} \cap D_{rh}$ contiene a todos los segmentos paralelos a n_l cuyos extremos están contenidos en R_{jk} y R_{rh} respectivamente, y dado que s_l es paralelo a n_l y sus extremos están contenidos en R_{jk} y R_{rh} respectivamente, entonces siempre existe $s_l \subset D_{jk} \cap D_{rh}$. Ahora bien, si $s_M < s_m$ (nótese que si $D_{jk} \cap D_{rh} = \emptyset$ entonces s_M y s_m no existen) entonces existen al menos dos segmentos con igual longitud tal que uno de ellos es perpendicular a Π_{jk} y tiene sus extremos contenidos en $D_j \cap R_{jk}$ y $D_k \cap R_{jk}$ respectivamente, y el otro es perpendicular a Π_{rh} y tiene sus extremos contenidos en $D_r \cap R_{rh}$ y $D_h \cap R_{rh}$ respectivamente; además los puntos medios de estos segmentos definen siempre un segmento s_l paralelo a n_l . Esto implica que siempre se pueden aplicar fuerzas con direcciones $L_i \subset D_i$, $i=1,2,3,4$, que cumplan con las dos condiciones $\|s_{jk}\| = \|s_{rh}\|$ y $s_l // n_l$ necesarias para determinar una prensión *regulus*.

5. MEDIDA DE CALIDAD DE LOS CONJUNTOS DE CARAS

Para seleccionar el conjunto de caras $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ más apropiado para apoyar los dedos, todos los conjuntos de caras válidos, tanto por sus orientaciones como por sus posiciones, son evaluados mediante una función de calidad que prima las siguientes dos acciones:

1. Maximizar el volumen del poliedro $C_D = \text{convexhull}(A_1, A_2, A_3, A_4)$ y buscar que su centroide esté cercano al centro de masa del objeto. Esto hace más factible la selección de cuatro puntos de contacto P_1, P_2, P_3 y P_4 que definan un tetraedro de mayor volumen y con centroide cercano al centro de masa del objeto, lo que produce mejores resultados frente a fuerzas y momentos externos (Liu y Wang, 1999).

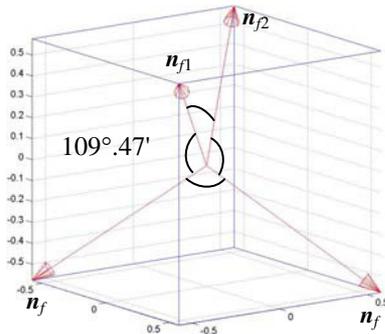


Figura 15. Ejemplo de vectores \mathbf{n}_{fi} que producen $r_e=r_{e\max}=0.333$, el ángulo entre cualesquiera dos de ellos es $109^\circ.47'$.

- Maximizar la mayor esfera centrada en el origen del espacio de fuerzas y contenida en el casco convexo de las fuerzas aplicadas. La esfera máxima se consigue cuando las fuerzas están equidistribuidas en el espacio y, por lo tanto, en equilibrio sin perturbaciones sus módulos son iguales. Esto permite un mayor rango de variación de las fuerzas aplicadas para mantener el equilibrio de fuerzas cuando existen perturbaciones (Nakamura, Nagai y Yoschikawa, 1989).

Así, se selecciona para la presión el conjunto de caras que maximiza la calidad $Q \in [0,1]$ dada por:

$$Q = \prod_{i=1}^3 q_i \quad (5)$$

siendo:

$$q_1 = \left| \frac{d_{c\max} - d_c}{d_{c\max}} \right| \quad (6)$$

donde d_c es la distancia desde el centroide c_d de C_D al centro de masa c_m del objeto, y $d_{c\max}$ es el máximo valor de d_c obtenido entre todos los conjuntos de caras válidos (q_1 indica cuán cercano está c_m de c_d , llegando a 1 cuando esta distancia es cero);

$$q_2 = \left| \frac{V_c}{V_{c\max}} \right| \quad (7)$$

donde V_c es el volumen de C_D y $V_{c\max}$ es el máximo valor de V_c obtenido entre todos los conjuntos de caras válidos (q_2 indica cuán cercano está V_c de $V_{c\max}$, llegando a 1 cuando estos volúmenes coinciden); y

$$q_3 = \left| \frac{r_e}{r_{e\max}} \right| = \left| \frac{r_e}{0.333} \right| \quad (8)$$

donde r_e es el radio de la máxima esfera centrada en el origen e incluida en el $\text{convexhull}(\mathbf{n}_{f1}, \mathbf{n}_{f2}, \mathbf{n}_{f3}, \mathbf{n}_{f4})$, y $r_{e\max} = 0.333$ es el máximo valor posible de r_e , que se obtiene para la distribución óptima de las \mathbf{n}_{fi} en que los ángulos entre cualesquiera dos de ellas son iguales, con valor $109^\circ 47'$ (Figura 15) (q_3 indica cuán homogénea es la distribución de las fuerzas \mathbf{f}_i con dirección de \mathbf{n}_{fi} , y cuando alcanza el valor máximo 1 las fuerzas tienen la misma magnitud en ausencia de perturbaciones externas).

Debe destacarse que aunque los dos primeros factores q_i se normalizan con respecto al máximo logrado entre todos los

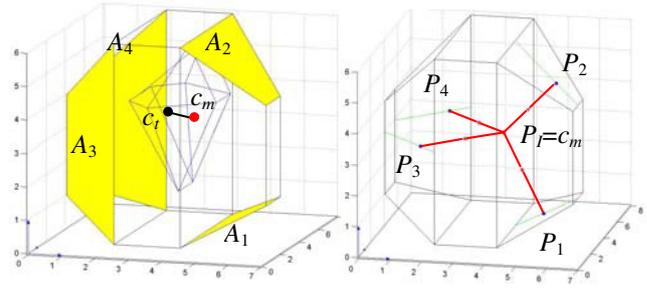


Figura 16. Cálculo de una presión *concurrente*.

conjuntos de caras y el tercero se normaliza con respecto a un máximo absoluto teórico, desde un punto de vista práctico estas normalizaciones son equivalentes, por cuanto el usar una u otra no afecta el orden de los conjuntos de caras establecido por su calidad. Por ejemplo, si para un factor q el máximo absoluto es q_M y el mejor conjunto de caras tiene calidad $q_m = c \cdot q_M$ con $c < 1$, entonces el normalizar con respecto a q_m en vez de hacerlo con respecto a q_M equivale a multiplicar todas las calidades finales por el factor constante c y por tanto no altera el orden de los conjuntos de caras en el ranking de calidades. En el caso de q_3 se usó un máximo absoluto porque éste es conocido, y en q_1 y q_2 se usó el máximo conseguido por un conjunto de caras ya que no existe un máximo absoluto definido a priori.

6. DETERMINACIÓN DE LOS PUNTOS DE CONTACTO

Los puntos de contacto P_i , $i=1,2,3,4$, que permiten una PEF sobre el conjunto de caras seleccionado se determinan buscando que el centroide del tetraedro que definen esté cercano al centro de masa del objeto.

En los apartados siguientes se describe el procedimiento seguido para cada tipo de presión, considerando siempre que cada fuerza \mathbf{f}_i tiene la dirección de \mathbf{n}_{fi} en ausencia de perturbaciones. Estas fuerzas cumplen con la restricción de fricción (ecuación (1)) y se aplican para alcanzar el equilibrio (ecuación (3)), pero una combinación lineal positiva de estas fuerzas no siempre puede contrarrestar cualquier fuerza generalizada externa aplicada sobre objeto (ecuación (2)), no obstante, tal como se comentó en la Sección 3.1, el uso de estas fuerzas para determinar P_i asegura, debido a la fricción, que siempre existen fuerzas $\mathbf{f}_i \in C_{fi}$ que satisfacen la ecuación (2) (posiblemente con una dirección diferente de \mathbf{n}_{fi}).

6.1 Caso de presiones concurrentes

En los conjuntos de caras que permiten una presión *concurrente* se cumple que $D_i = D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap D_4 \neq \emptyset$ (Sección 4.2, Caso A), por lo que los puntos de contacto P_i , $i=1,2,3,4$, pueden obtenerse mediante las proyecciones sobre A_i con dirección de \mathbf{n}_{fi} de cualquier punto de D_i . Basado en esta condición, el siguiente procedimiento genera puntos P_i , $i=1,2,3,4$, tal que el punto donde intersectan las fuerzas de contacto $P_i = L_1 \cap L_2 \cap L_3 \cap L_4$ esté próximo al centro de masa c_m del objeto:

- Determinar el punto $P_i \in D_i$ más cercano a c_m , siendo c_i el centroide de D_i (nótese que si $c_m \in D_i$, entonces $P_i = c_m$).
- Trazar cuatro rectas por P_i con las direcciones de \mathbf{n}_{f1} , \mathbf{n}_{f2} , \mathbf{n}_{f3} y \mathbf{n}_{f4} (Figura 16). Los puntos de intersección de estas rectas con las caras A_1 , A_2 , A_3 , y A_4 determinan P_1 , P_2 , P_3 y P_4 , respectivamente.

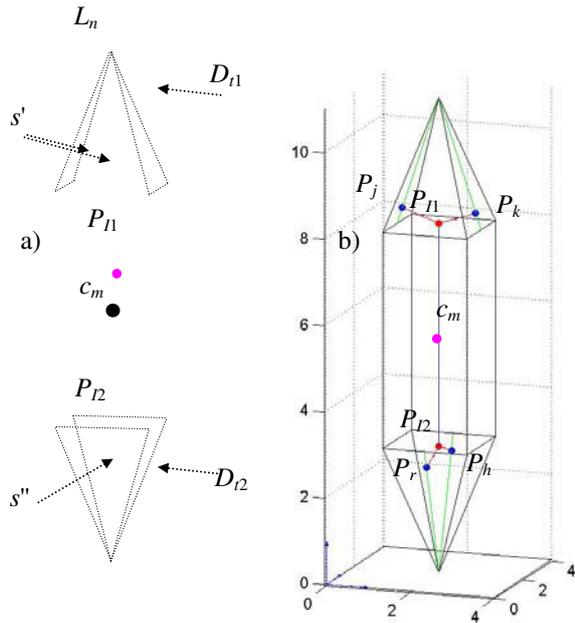


Figura 17 a) Regiones D_{11} y D_{12} (zonas sombreadas); b) presión *flat-pencil*.

6.2 Caso de presiones *flat-pencil*

En los conjuntos de caras que permiten una presión *flat-pencil* se cumple que $D_{jk} \cap D_{rh} \neq \emptyset$, lo que implica necesariamente que $D_{11} = D_{jk} \cap D_{rh} \cap D_j \cap D_k \neq \emptyset$ y $D_{12} = D_{jk} \cap D_{rh} \cap D_r \cap D_h \neq \emptyset$ (Figura 17a) y existe un conjunto de rectas paralelas a n_1 (recuérdese que $n_1 // \Pi_{jk} \cap \Pi_{rh}$) que intersectan con D_{11} y D_{12} simultáneamente (Sección 4.2, Caso B).

El procedimiento que se describe a continuación determina dos puntos, un punto P_{11} perteneciente a D_{11} y otro P_{12} perteneciente a D_{12} , contenidos ambos en una recta paralela a n_1 y ubicados lo más próximo posible a c_m . Las proyecciones P_{11} sobre A_j y A_k con direcciones n_{j1} y n_{k1} generan respectivamente P_j y P_k , y las proyecciones de P_{12} sobre A_r y A_h con direcciones n_{r1} y n_{h1} generan respectivamente P_r y P_h , siendo $\{j,k,r,h\} = \{1,2,3,4\}$:

1. Determinar la recta, L_n , más próxima a c_m , paralela a n_1 y que intersecta con D_{11} y D_{12} (Figura 17a).
Sean $s' = L_n \cap D_{11}$ y $s'' = L_n \cap D_{12}$ (por construcción $s' \neq \emptyset$ y $s'' \neq \emptyset$).
2. Determinar los puntos P_{11} y P_{12} más próximos a c_m sobre los segmentos s' y s'' , respectivamente.
3. Trazar dos rectas que pasen por P_{11} con direcciones de n_{j1} y n_{k1} respectivamente y otras dos por P_{12} con direcciones de n_{r1} y n_{h1} , respectivamente (Figura 17b). Los puntos de intersección de estas cuatro rectas con las caras A_1, A_2, A_3 , y A_4 respectivamente determinan P_1, P_2, P_3 y P_4 .

Nótese que los dos pares de rectas trazadas en el paso 3 son respectivamente L_j y L_k (que definen Π_{jk}), y L_r y L_h (que definen Π_{rh}), y se cumple entonces $L_j \cap L_k = P_{11}$ y $L_r \cap L_h = P_{12}$ y por lo tanto $P_{11} \in \Pi_{jk}$ y $P_{12} \in \Pi_{rh}$. Además P_{11} y P_{12} están contenidos en la recta L_n paralela a n_1 (pasos 1 y 2), y como n_1 es un vector paralelo a $\Pi_{jk} \cap \Pi_{rh}$ (recuérdese que $n_1 = (n_{j1} \times n_{k1}) \times (n_{r1} \times n_{h1})$) entonces $L_n \subset \Pi_{jk}$ y $L_n \subset \Pi_{rh}$ por lo tanto $P_{11} \in \Pi_{rh}$ y $P_{12} \in \Pi_{jk}$, cumpliéndose con ello la condición necesaria y suficiente para obtener una presión *flat-pencil* (Sección 4.2, Caso B).

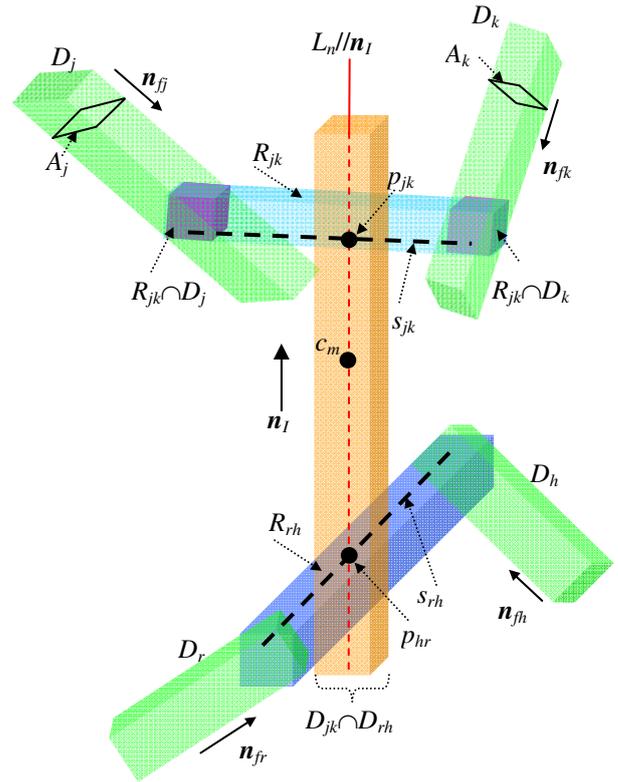


Figura 18. Determinación de una presión *regulus*.

6.3 Caso de presiones *regulus*

En los conjuntos de caras que permiten una presión *regulus* siempre se cumple $D_{jk} \cap D_{rh} \neq \emptyset$ y $s_M < s_m$ (Sección 4.2, Caso C). El procedimiento que se describe a continuación se basa en estas condiciones para determinar dos segmentos de igual longitud, uno perpendicular a Π_{jk} y con sus extremos contenidos en D_j y D_k respectivamente y a igual distancia de Π_{jk} , y el otro perpendicular a Π_{rh} con sus extremos contenidos en D_h y D_r respectivamente y a igual distancia de Π_{rh} . Las proyecciones de los extremos del segmento perpendicular a Π_{jk} sobre A_j y A_k con direcciones n_{j1} y n_{k1} generan respectivamente P_j y P_k , y las proyecciones de los extremos del segmento perpendicular a Π_{rh} sobre A_r y A_h con direcciones n_{r1} y n_{h1} generan respectivamente P_r y P_h (Figura 18):

1. Determinar la recta, $L_n \in D_{jk} \cap D_{rh}$, paralela a n_1 y más próxima a c_m .
2. Trazar dos segmentos, s_{jk} y s_{rh} , tal que:
 - $s_{jk} \perp (n_{j1} \times n_{k1})$ y $s_{rh} \perp (n_{r1} \times n_{h1})$, es decir $s_{jk} \perp \Pi_{jk}$ y $s_{rh} \perp \Pi_{rh}$, aun cuando las posiciones de estos planos no se conocen exactamente.
 - s_{jk} y s_{rh} intersectan a L_n en sus respectivos puntos medios P_{jk} y P_{rh} .
 - $s_{jk} \subset R_{jk}$ con sus extremos sobre D_j y D_k , y $s_{rh} \subset R_{rh}$ con sus extremos sobre D_h y D_r . Recuérdese que R_{jk} (R_{rh}) es la región que contiene todos los segmentos perpendiculares a Π_{jk} (Π_{rh}) y cuyos extremos pertenecen a D_j y D_k (D_h y D_r) respectivamente (Sección 4.2, Caso C). Cualquier par de segmentos que cumpla estas condiciones es válido, en la implementación realizada se ha elegido: a) que s_{jk} y s_{rh} tengan como puntos medios, p_{jk} y p_{rh} respectivamente, dos

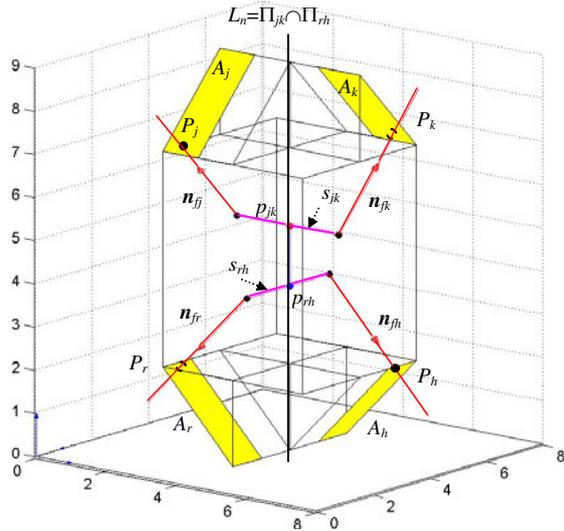


Figura 19 Puntos de contacto que determinan una presión *regulus*.

puntos ya conocidos fruto de las operaciones geométricas realizadas (los dos más cercanos resultantes de la intersección de la recta L_n con $D_{jk} \cap D_{rh} \cap R_{hr}$ y con $D_{jk} \cap D_{rh} \cap R_{jk}$ respectivamente), y, b) que s_{jk} y s_{rh} tengan una longitud $\|s_M + s_m\|$ que también es conocida (es decir $\|s_{jk}\| = \|s_{rh}\| = \|s_M + s_m\|$); sabiendo que por construcción estas elecciones cumplen las condiciones anteriores.

3. Trazar una recta por cada extremo de s_{jk} y s_{rh} con las correspondientes direcciones n_{j1}, n_{j2}, n_{j3} y n_{j4} . Los puntos de intersección de estas rectas con las correspondientes caras A_1, A_2, A_3 , y A_4 determinan P_1, P_2, P_3 y P_4 , respectivamente (Figura 19).

Nótese que las cuatro rectas trazadas en el paso 3 (una por cada extremo de s_{jk} y de s_{rh}) son respectivamente L_j y L_k (que definen Π_{jk}) y L_r y L_h (que definen Π_{rh}); $\|s_{jk}\|$ y $\|s_{rh}\|$ son las distancias entre L_j y L_k y entre L_r y L_h respectivamente (paso 2) y dado que $\|s_{jk}\| = \|s_{rh}\|$ entonces se cumple con una de las dos condiciones necesarias para obtener una presión *regulus*. Ahora bien dado que Π_{jk} y Π_{rh} son planos paralelos y equidistantes a L_j y L_k y a L_r y L_h respectivamente, entonces los puntos medios de s_{jk} y s_{rh} (p_{jk} y p_{hr} respectivamente) cumplen que $p_{jk} \in \Pi_{jk}$ y $p_{hr} \in \Pi_{hr}$, y además p_{jk} y p_{hr} están contenidos en L_n (pasos 1 y 2) por lo tanto $p_{jk} p_{rh} \subset L_n$ y como L_n / n_l y $n_l / \Pi_{jk} \cap \Pi_{rh}$, entonces $L_n \subset \Pi_{jk}$ y $L_n \subset \Pi_{hr}$ por lo tanto $L_n = \Pi_{jk} \cap \Pi_{hr}$. Esto implica que $p_{jk} p_{rh} \subset \Pi_{jk} \cap \Pi_{hr}$, cumpliéndose con ello con la restante condición necesaria para obtener una presión *regulus* (nótese que p_{jk} y p_{rh} se corresponden con P_{jk} y P_{rh} en las presiones *flan-pencil*).

7. EJEMPLOS Y VALORACIÓN DE RESULTADOS

El método propuesto fue implementado usando Matlab y probado en un servidor INTEL Biprocessor Pentium III 1,4 GHz. En esta sección se muestran ejemplos de su aplicación, considerando un coeficiente de fricción constante $\mu = 0,36$. En la Figura 20 pueden verse tres objetos usados en los ejemplos, mostrando los primeros seis conjuntos de caras seleccionados en cada uno de ellos según la calidad Q dada por la ecuación (5). Las Figuras 21, 22 y 23 muestran, respectivamente, las presiones de cada tipo obtenidas sobre el conjunto de caras con máxima calidad en cada objeto.

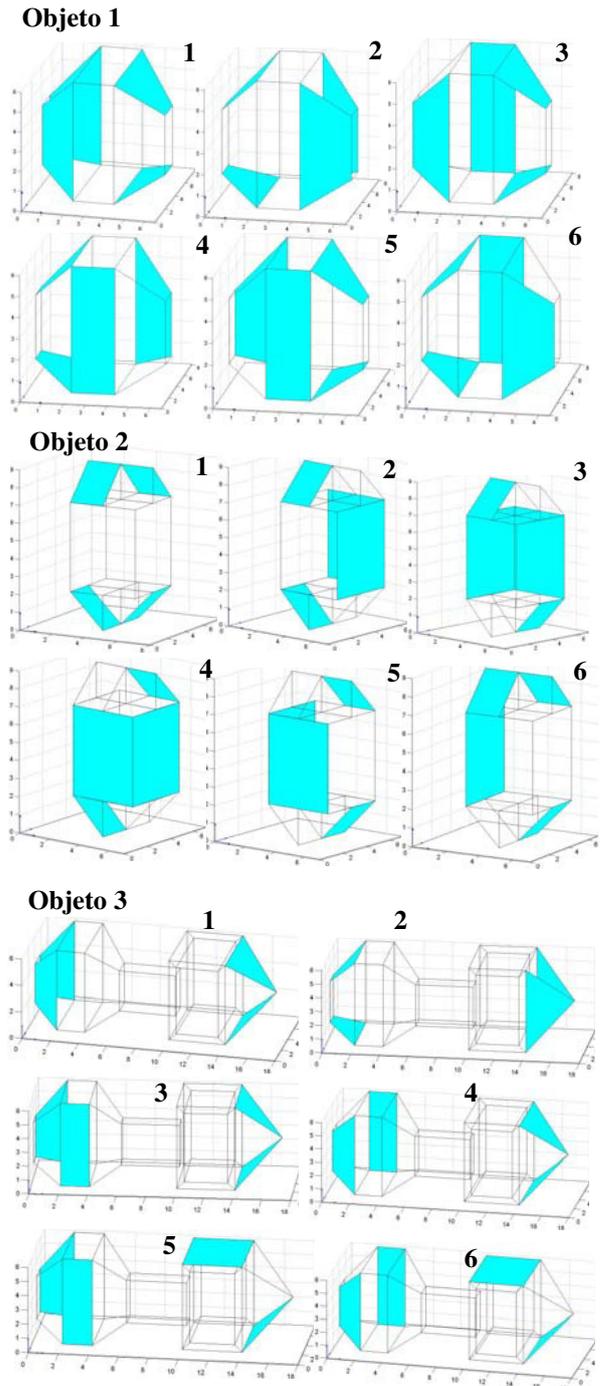


Figura 20. Primeros seis conjuntos de caras seleccionados en cada ejemplo.

En la Tabla 1 se da información sobre la determinación de la presión más simple en cada caso, la *concurrente* en el objeto 1, la *regulus* en el objeto 2 y la *flat-pencil* en el objeto 3. Nótese que las diferentes presiones sobre el mismo conjunto de caras sólo afecta el tiempo T_{PF} que es despreciable comparado con los demás. Estas presiones se han comparado con las óptimas en cada caso, considerando como tales las que son capaces de resistir la mayor fuerza generalizada de perturbación, independientemente de su dirección, cuando la fuerza máxima que puede ejercer cada dedo está limitada (Ferrari y Canny, 1992). Una revisión detallada de las medidas de calidad usadas en presión de objetos se da en el trabajo de Roa, Suárez y Cornellà (2008).

Tabla 1. Datos de la determinación de las prensiones en los ejemplos.

	N_C	N_{SC}	N_{OC}	N_{PC}	T_C	T_{PF}
Objeto 1	14	715	19	19	35.8s	18ms
Objeto 2	24	10626	338	134	464.8s	24ms
Objeto 3	32	35960	1041	387	1482s	20ms

N_C : número de caras del objeto.
 N_{SC} : número de conjuntos de cuatro caras evaluados.
 N_{OC} : número de conjuntos de cuatro caras que pasan la fase de selección según su orientación.
 N_{PC} : número de conjuntos de caras que pasan la fase de selección según su posición.
 T_C : tiempo de cálculo de todo el proceso.
 T_{PF} : tiempo de cálculo de los puntos de contacto dado el conjunto de caras seleccionado.

Tabla 2. Comparación de las prensiones resultantes con la óptima (presión concurrente en el objeto 1).

	Q_p	Q_{op}	$(Q_p/Q_{op})\%$
Objeto 1	0.1336	0.1336	100%
Objeto 2	0.1712	0.1732	98.84%
Objeto 3	0.1823	0.1823	100%

La presión óptima se ha estimado utilizando 50 potenciales puntos de contacto distribuidos sobre cada cara y calculando la calidad que producen las diferentes combinaciones de cuatro puntos de contacto, uno sobre cada cara. El cono de fricción en cada contacto se ha linealizado aproximándolo con una pirámide de 4 caras. La medición de momentos se realizó con respecto a c_m , y con el fin de ajustar la métrica del espacio de fuerzas generalizadas los momentos se han escalado con un factor igual al recíproco de la máxima distancia desde c_m a cualquier punto del objeto, lo que hace que el momento máximo sea potencialmente igual a la fuerza máxima aplicada (Miller y Allen, 1999).

La Figura 24 muestra las prensiones óptimas obtenidas en cada objeto y los puntos de contactos considerados sobre las caras usadas en esta presión; puede apreciarse que en todos los objetos el conjunto de caras que contiene la presión óptima coincide con el seleccionado por el método descrito en este trabajo (Figuras 21, 22 y 23). La Tabla 2 muestra la relación entre la calidad máxima Q_{op} obtenida para cada objeto y la obtenida con el método propuesto Q_p (similares resultados se han obtenido con otros objetos).

Pollard (1996) afirma que una presión presenta una buena calidad cuando tiene una calidad de al menos el 75% de la óptima, por lo que según este criterio las calidades obtenidas con el procedimiento propuesto son muy aceptables desde un punto de vista práctico. Las principales ventajas del método descrito en este trabajo con respecto trabajos previos (por ejemplo: Sudsang and Ponce, 1995; Ponce et al., 1997 y Niparnan and Sudsang, 2004) es que permite calcular PEF sobre conjuntos de caras con normales coplanares o normales que no expanden \mathfrak{R}^3 , genera los tres tipos de PEF, y a diferencia de los métodos descritos en la Sección 2 no se precisa linealizar el cono de fricción y los cálculos se realizan en un espacio en 3D. El principal inconveniente del método es que, a pesar de las ventajas mencionadas, la selección del mejor conjunto de caras requiere un tiempo aun significativo.

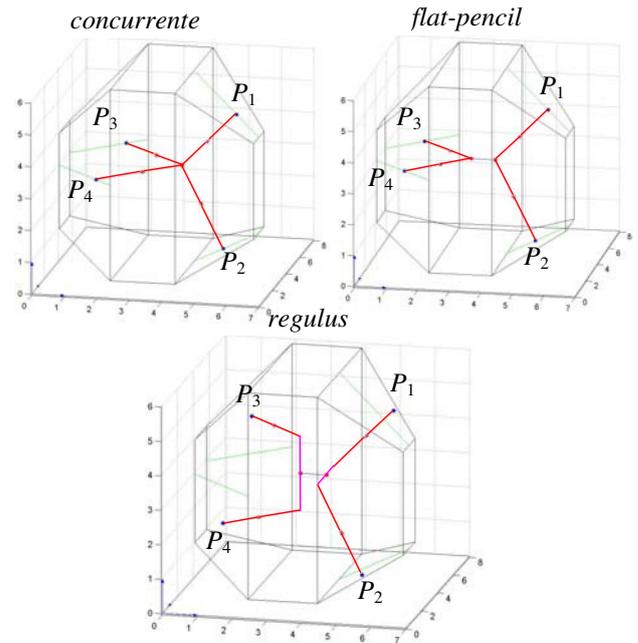


Figura 21. Prensiones de cada tipo obtenidas para el primer objeto sobre el conjunto de caras seleccionado por su mejor calidad.

8. CONCLUSIONES

El método geométrico presentado en este trabajo calcula los tres tipos de prensiones posibles con cuatro puntos de contacto: *concurrente*, *flat-pencil* y *regulus*. Primero se determinan todos los conjuntos de cuatro caras cuyas orientaciones y posiciones relativas los hacen válidos para obtener prensiones que alcanzan el equilibrio con no más de dos fuerzas de contacto contenidas en un mismo plano. Posteriormente, de entre todos los conjuntos de cuatro caras válidos se selecciona para la presión el que maximiza una medida de calidad dada. Finalmente, sobre el conjunto de caras seleccionado se determinan los puntos de contacto dedo-objeto que aseguran una presión con equilibrio de fuerzas. El método propuesto trabaja sobre caras convexas; en

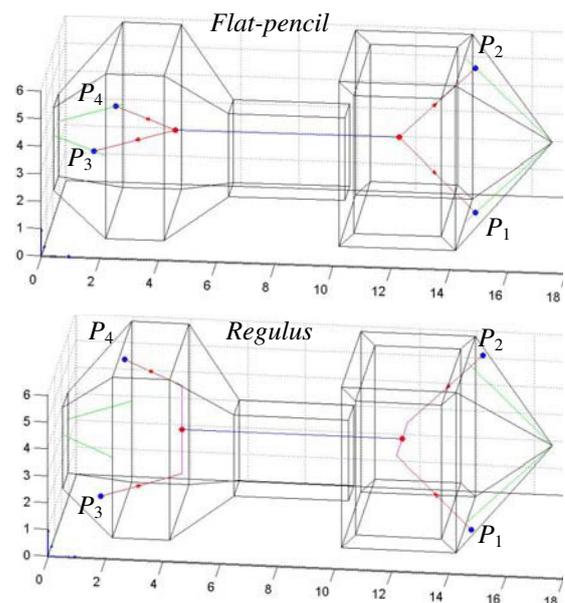


Figura 22. Prensiones obtenidas en el tercer ejemplo sobre el conjunto de caras seleccionado.

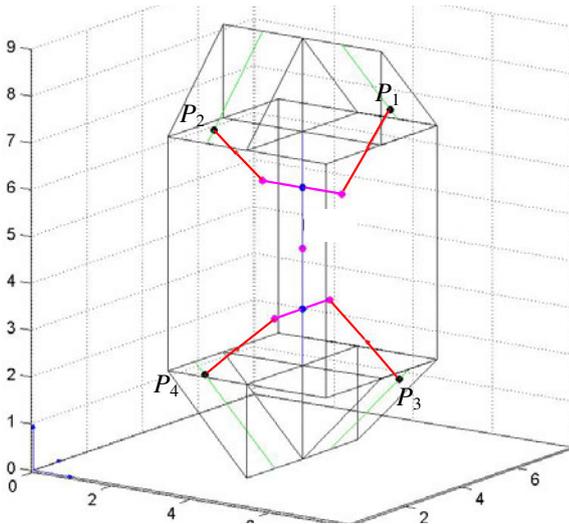


Figura 23. Presión obtenida en el segundo ejemplo sobre el conjunto de caras seleccionado (sólo son posibles presiones *regulus*).

el caso de caras cóncavas, cada una de las cuales será tratada como cara independiente, lo que puede producir distintos resultados según la forma que se realice la partición. Por otra parte, una partición predeterminada, aun de caras inicialmente convexas permite resolver una PEF con dos puntos de contacto sobre una misma cara del objeto. Puesto que inicialmente se consideran todos los posibles conjuntos de caras, el tiempo necesario para la selección del conjunto de caras a ser contactado por los dedos se incrementa con el número de caras del objeto, pero una vez conocidas las caras de contacto el tiempo de cálculo para determinar los puntos de contacto es mínimo. Esto hace que el procedimiento de selección de puntos sea de gran utilidad, aun en el caso de que las caras de contacto se elijan por otro procedimiento o vengan condicionadas por otros factores. Las presiones obtenidas en diferentes ejemplos fueron comparadas con las óptimas en cuanto a resistencia a fuerzas de perturbación se refiere, y las presiones resultantes con el método propuesto tienen una calidad superior al 98% de la calidad de las presiones óptimas.

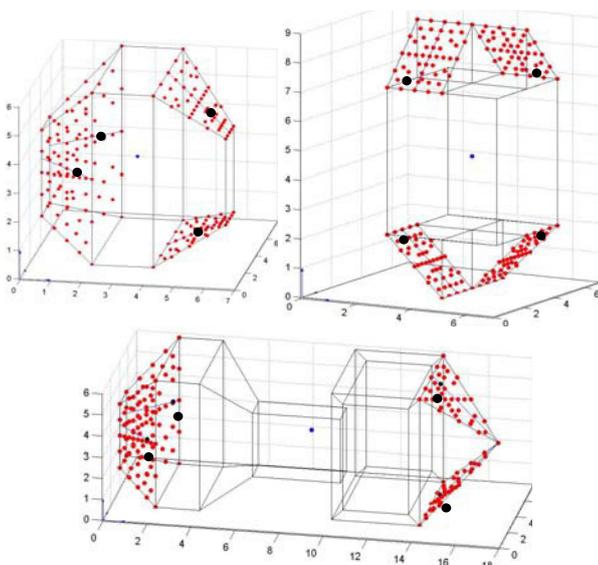


Figura 24. Presiones óptimas sobre cada objeto y puntos usados para su evaluación (se muestran sólo los de las caras que dan la presión óptima).

REFERENCIAS

- de Berg, M., M. Van Kreveld, M. Overmars y O. Schwarzkopf (2000). *Computational Geometry – Algorithms and Applications*. Springer, Second Edition (ISBN: 3-540-65620-0).
- Ferrari, C. and J. Canny (1992). Planning optimal grasps. *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pp. 2290-2295.
- Liu, Y., D. Ding and S. Wang (1999). Constructing 3D frictional from-closure grasps of polyhedral objects. *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pp. 1904-1909.
- Miller, A. y P. Allen (1999). Example of 3D grasp quality computation. *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pp. 1240-1246.
- Nakamura, Y., K. Nagai and T. Yoshikawa (1989). Dynamics and Stability in Coordination of Multiple Robotic Mechanisms. *Int. Journal of Robotic Research*, Vol. 8, Nº 2, Abril.
- Nguyen, N. (1988) Constructing force-closure grasps. *IEEE Int. Journal of Robotics Research*, 7, No.3, pp. 345-362.
- Niparnan, N. and A. Sudsang (2004). Fast computation de 4-Fingered force-closure grasps from surface point. *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pp. 3692-3697.
- Pollard, N., (1996). Synthesizing Grasps from Generalized Prototypes. *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pp. 2124-2129, Minneapolis, Minnesota
- Ponce, J., S. Sullivan, D. Boissonnat and J. Merlet (1993). On Characterizing Three and Four-Finger Force-Closure Grasps of Polyhedral Objects. *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pp. 821-827.
- Ponce, J., S. Sullivan, A. Sudsang, D. Boissonnat and J. Merlet (1997). On Computing Four-Finger Equilibrium and Force-Closure Grasps of Polyhedral Objects. *Int. Journal of Robotics Research*, Vol. 16, No.1, pp. 11-30.
- Prado, R. and R. Suárez (2005). Heuristic Grasp Planning with Three Frictional Contacts on Two or Three Faces of a Polyhedron. *6th IEEE International Symposium on Assembly and Task planning*
- Prado, R. and R. Suárez (2006). Grasps planning with four frictional contacts on polyhedral objects. *8th IFAC Symposium on Robot Control, SYROCO*. Bologna, Italy, September 6-8, 2006.
- Roa, M., R. Suárez y J. Cornellà (2008). Revisión de medidas de calidad para la presión de un objeto. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial, RIAI*, Vol. 5, Num. 1, enero 2008, pp. 66-82.
- Sudsang, A. and J. Ponce (1995). New techniques for computing four-finger force-closure grasps of polyhedral objects. *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pp. 1355-1360.
- Zhu, X. and J. Wang (2003). Synthesis of Force-Closure Grasps on 3-D Objects Based on the Q Distance. *IEEE Trans. Robotics and Automation*, Vol. 19, No. 4, pp. 669-679.
- Zhu, X., H. Ding and M. Wang (2004). A numerical test for the closure properties of 3-D grasps. *IEEE Trans. Robotics and Automation*, Vol. 20, No 3, pp. 543-549.