

## Detección Eficiente de Elipses en Imágenes. Aplicación al Posicionamiento 3D de un Robot Industrial.

Eusebio de la Fuente López<sup>a,\*</sup>, Félix Miguel Trespaderne<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Instituto de Tecnologías Avanzadas de la Producción, P<sup>o</sup> del Cauce 59, 47011 Valladolid, España.

<sup>b</sup> Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática, Universidad de Valladolid, P<sup>o</sup> del Cauce 59, 47011 Valladolid, España.

### Resumen

En este artículo se presenta un algoritmo para la detección de elipses en imágenes, cuyo objetivo es el cálculo de la posición 3D de una característica circular en una aplicación robótica. El algoritmo emplea un procedimiento estocástico RANSAC cuya eficiencia ha sido mejorada. El muestreo aleatorio ha sido sustituido por un muestreo guiado sobre las cadenas de contorno de la imagen, que son ordenadas de acuerdo a un criterio de probabilidad de formar parte de la elipse buscada. Esta estrategia disminuye notablemente la cantidad de muestras necesarias, permitiendo que el algoritmo sea adecuado para tiempo real. Copyright © 2012 CEA. Publicado por Elsevier España, S.L. Todos los derechos reservados.

### Palabras Clave:

Reconocimiento de Patrones, Estimación Robusta, Visión para Robots, Robots Industriales.

### 1. Introducción

Las necesidades de fabricación actuales precisan de sistemas robóticos capaces de llevar a cabo la manipulación en entornos no estructurados. En muchas aplicaciones se necesita procesar piezas mezcladas, con diferencias significativas entre ellas y que aparecen en los puntos de manipulación mediante mecanismos que no controlan ni su posición ni su orientación. En estas circunstancias, las soluciones convencionales basadas en robots no son aplicables. Por este motivo, muchas de estas líneas industriales contienen todavía una gran carga de trabajo manual aunque las tareas que en ellas se realicen consistan en operaciones simples y repetitivas.

La clave para la automatización de tales procesos radica en la incorporación de capacidades sensoriales que permitan proporcionar a los robots la localización y la orientación de las piezas. Entre las diversas opciones, la visión artificial ha alcanzado un papel preponderante, soportada por el crecimiento continuo de la capacidad de cálculo de los microprocesadores, lo que ha permitido la utilización de los complejos algoritmos de visión para reconocimiento de patrones y estimación 3D.

La obtención de información 3D a partir de una escena empleando imágenes bidimensionales ha sido un importante tema de investigación (Hartley y Zisserman, 2004) por su trascendencia en aplicaciones tales como la estimación de la posición

(Rosenhahn *et al.*, 2004), la navegación de robots móviles (DeSouza y Kak, 2002) y el servocontrol visual (Chaumette y Hutchinson, 2006; Soria *et al.*, 2008; Gracia y Pérez, 2010). Las cámaras de vídeo han sido empleadas para obtener información visual siguiendo diferentes estrategias. Sin embargo, la técnica más implantada en el campo industrial por su robustez y simplicidad es el empleo de una única cámara. Estos sistemas mono-cámara operan buscando patrones geométricos en las piezas y estimando su posición 3D a partir de un conocimiento a priori de las características del modelo. Entre los diferentes patrones utilizados para estimar la posición, las elipses han sido extensamente empleadas en visión por computador, puesto que la posición 3D de una característica circular puede ser extraída a partir de una única imagen empleando la proyección inversa del modelo de la cámara calibrada (Kanatani y Liu, 1993).

En este artículo se presenta un algoritmo eficiente de detección de elipses en imágenes y su aplicación al posicionamiento 3D de un robot industrial. La aplicación industrial consiste en la robotización de una tarea en una línea de fabricación de radiadores de calefacción, donde distintos tamaños y modelos diferentes deben ser procesados simultáneamente sin parar los productos. Se trata de automatizar la tarea de sellado de cada una de las entradas y salidas de los radiadores, con el objetivo de evitar la penetración de pintura dentro del radiador en un posterior proceso de proyección de pintura. Para ello, se ha utilizado la

\* Autor en correspondencia.

Correo electrónico: [efuente@eii.uva.es](mailto:efuente@eii.uva.es)

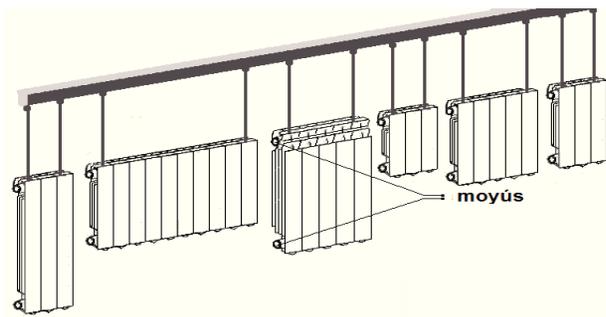


Figura 1: En la línea de fabricación de radiadores de calefacción aparecen mezclados radiadores de distintos tamaños y modelos. La robotización del sellado supone la detección de los patrones circulares de los moyús.

detección de los perfiles circulares de estas entradas y salidas, conocidas en la planta de fabricación como *moyús* (figura 1), y el cálculo de su posición y orientación 3D.

### 1.1. Automatización del sellado de radiadores

El sellado de radiadores con pegatinas se lleva a cabo justamente antes del proceso electrostático de recubrimiento con pintura en polvo. El sellado es necesario porque si el polvo de pintura se deposita en el roscado del moyú, la estanqueidad de la conexión se vería comprometida cuando el radiador sea montado en una instalación doméstica. El sellado con pegatinas es una tarea simple y repetitiva pero la alta variabilidad en el tamaño de los radiadores y la imposibilidad de parar el producto han dificultado una automatización más temprana.

El sistema automático deberá ser capaz de trabajar como lo vienen haciendo los operadores humanos, es decir, sobre diferentes modelos de radiadores que llegarán mezclados al punto de sellado colgados de una cadena transportadora. Con objeto de trabajar sobre un amplio rango de tamaños sin necesidad de parar los productos, se ha equipado a un robot con una etiquetadora industrial que dispensará las pegatinas de sellado y dos sistemas de visión para el guiado del robot. El primer sistema de visión es fijo y su función es obtener una primera estimación de la posición a partir de una imagen lateral de los radiadores colgados en la cadena. El segundo sistema, montado sobre el brazo del robot junto a la dispensadora de pegatinas, calcula la posición 3D definitiva (Miguel y Fuente, 2009). Puede verse un vídeo del sistema en funcionamiento en (Fuente, 2011).

El robot, dotado de un sistema comercial de seguimiento (*conveyor tracking*), empleará la información proporcionada por el sistema de visión fijo para situar la cámara embarcada en una posición desde donde el perfil circular del moyú pueda verse completamente. La imagen adquirida por el sistema de visión embarcado permite determinar con precisión la posición y orientación del moyú del radiador, parámetros que se transmitirán al robot para completar la operación de sellado.

El perímetro circular del moyú se proyecta en la imagen como un patrón elíptico (figura 2a). Sin embargo, la detección de este patrón en las imágenes no es trivial debido a la presencia de una enorme cantidad de cadenas de contorno originadas por el roscado interno del moyú, las aletas del radiador, brillos y sombras (figura 2b). Estas cadenas de contorno, que no corresponden al contorno elíptico del moyú, hacen que la detección del patrón elíptico correcto sea realmente compleja.

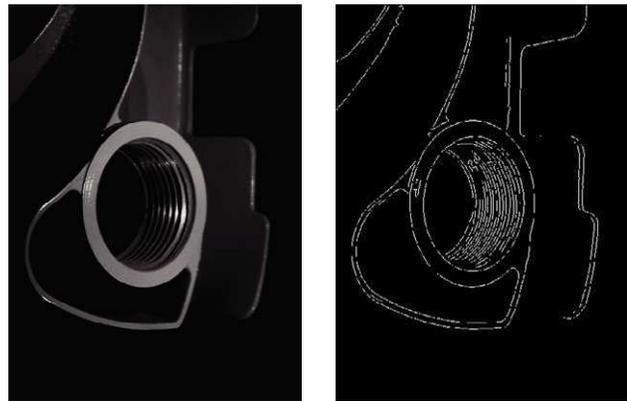


Figura 2: a) Imagen del moyú del radiador. b) Puntos de contorno obtenidos con el detector de contornos con precisión subpixel.

En este artículo presentamos el algoritmo para la detección de elipses, desarrollado prestando especial atención a la robustez y al tiempo de ejecución, además del cálculo de la posición 3D del patrón circular del moyú. El artículo está organizado como sigue. En la sección siguiente, se hace una breve revisión bibliográfica del trabajo previo en el campo de la detección de elipses. La sección 3 presenta nuestro método, que incluye un filtrado previo de las cadenas de contorno que aparecen en la imagen y un algoritmo RANSAC mejorado. La sección 4 ilustra la transformación que relaciona la elipse encontrada en la imagen con la posición en el espacio del contorno circular del moyú. Los resultados experimentales se muestran en la sección 5 y finalmente presentamos las conclusiones de este trabajo.

## 2. Detección de elipses: trabajo previo

Han sido muchas las técnicas para la detección de elipses en imágenes que se han presentado en la literatura de visión por computador. Nosotros precisaremos para determinar los parámetros de la elipse de un método que sea especialmente robusto, debido a la gran cantidad de puntos de contorno que aparecen en las imágenes.

Empleando la nomenclatura estadística, los puntos de contorno correspondientes al contorno externo del moyú serán denominados *inliers*, debido a que estos puntos son los únicos datos cuya distribución puede ser explicada por el modelo de una elipse de parámetros desconocidos. El resto de los puntos de contorno serán denominados datos atípicos o *outliers*, debido a su inconsistencia con el modelo buscado.

La detección directa de la elipse mediante métodos de optimización basados en mínimos cuadrados (Halir y Flusser, 1998; Fitzgibbon *et al.*, 1999) es, por razones obvias, inutilizable sin la eliminación de los outliers. Una alternativa sería el uso de una técnica de estimación robusta (Rousseeuw y Leroy, 1987), como el conocido método de la mínima mediana de cuadrados (*LMedS Least Median Squares*). El estimador LMedS escoge como resultado el modelo con el menor error en la mediana para un número suficiente de muestras obtenidas del conjunto de datos (Zhang, 1997). LMedS tampoco es muy útil en nuestro caso porque esta técnica asume que al menos la mitad de los datos son *inliers*. En nuestras imágenes, el número de outliers es significativamente mayor del 50% del total de datos.

Numerosos trabajos utilizan para la detección de elipses variantes de la transformada de Hough (TH). La transformada de Hough (Hough, 1962; Ballard, 1981; Illingworth y Kittler, 1998) es una técnica que fue propuesta hace ya 50 años y desde entonces ha sido ampliamente investigada y aplicada para la detección de muchas primitivas geométricas en procesamiento de imagen. La idea básica de la TH es la construcción de una tabla en el espacio de parámetros. Cuando se transforma cada punto de contorno al espacio de parámetros, incrementa los acumuladores asociados que hay en cada celda de la tabla. Los parámetros correspondientes a la celda más votada son los escogidos como modelo.

La TH tiene varios inconvenientes. El elevado coste computacional hace que la técnica no sea adecuada para la detección de modelos con gran dimensión. Además, la cantidad de memoria necesaria para representar la tabla de acumulación en el espacio de parámetros crece exponencialmente con la dimensión del modelo. Actualmente la TH se emplea con éxito en la detección en tiempo real de rectas, como en (Miguel y Fuente, 2009), pero el cálculo que precisa para la detección de elipses (modelo de cinco dimensiones) la hacen impracticable en una aplicación de robótica.

A partir del trabajo seminal sobre la transformada de Hough aleatoria (RHT Randomized Hough Transform) presentado en (Xu *et al.*, 1990), se han propuesto múltiples versiones estocásticas de la TH para la detección de elipses, de tal forma que logran reducir el tiempo de cálculo y la capacidad de memoria necesaria (McLaughlin, 1998; Cheng y Liu, 2004; Hahn *et al.*, 2008). En esencia, estos métodos seleccionan de forma aleatoriamente muestras formadas por de 3 a 5 puntos de contorno, dependiendo del método y las asunciones geométricas preestablecidas, tales como la simetría intrínseca de una elipse y el valor de la dirección de gradiente en los puntos. Con estos puntos, se calculan los parámetros de la elipse, incrementándose la puntuación de la celda correspondiente en la tabla de acumulación. En cualquier caso y sin entrar en otros detalles, estos enfoques fallan sobre nuestras imágenes de radiadores, debido principalmente a la gran cantidad de arcos elípticos que se generan en el roscado interior del moyú, lo que provoca severas interferencias en las tablas de acumulación.

La propuesta que presentamos en este trabajo usa el algoritmo para estimación robusta RANSAC, abreviatura para "RANdom SAMple Consensus", introducido en el trabajo (Fischler y Bolles, 1981), y desde entonces profusamente empleado en el campo de la visión por computador. Al igual que los algoritmos basados en la RTH, RANSAC selecciona de forma aleatoria muestras de  $n$  puntos para obtener los parámetros del modelo, pero en lugar de usar una tabla de acumulación, RANSAC calcula, de acuerdo a un umbral de proximidad prefijado, el número de puntos de contorno de la imagen que están *en consenso* con el modelo.

La eficiencia del algoritmo RANSAC estándar se ve mejorada si la elección de las muestras se guía de alguna manera, como alternativa a hacer un muestreo puramente aleatorio entre todos los puntos de contorno. Esto se hace en nuestro trabajo en dos etapas:

- Filtrado del conjunto de outliers, recurriendo al agrupamiento de los puntos de contorno formando cadenas que se correspondan con arcos de las elipses.
- Imposición de restricciones adicionales entre los puntos del conjunto de la muestra, tales como distancias mínimas o máximas entre puntos, pertenencia a arcos significativos, etc.

El enfoque basado en la obtención de arcos de elipses ha sido ampliamente utilizado (Rosin y West, 1995; McLaughlin y Alder, 1998; Kanatani y Ohta, 2004; Liu y Qiao, 2009; Thanh *et al.*, 2009). El trabajo descrito en (Mai *et al.*, 2008) adicionalmente también emplea el algoritmo RANSAC, pero la estrategia utilizada, similar a algunos de los trabajos previamente citados, se fundamenta en, a su vez, crear agrupaciones de arcos de elipse. De nuevo, la gran cantidad de arcos de elipse espurios presente en nuestras imágenes, no garantiza que las agrupaciones sean correctas. Una alternativa sería ensayar mediante un proceso de prueba y error diferentes combinaciones en los arcos componentes de las agrupaciones, pero esto conduciría a ralentizar el algoritmo e imposibilitaría su utilización en la aplicación industrial.

En este trabajo hemos optado por la estrategia de imponer restricciones adicionales entre los puntos del conjunto de la muestra. En los últimos años, han aparecido modificaciones del algoritmo RANSAC estándar, que sustituyen el muestreo aleatorio por una estrategia que emplea algún tipo de información a priori. En el trabajo de (Tordoff y Murray, 2002), para resolver un problema de homografía, se sustituye el muestreo aleatorio por un muestreo guiado por información a priori de similitud. Emplearon una puntuación previa para dar prioridad a los emparejamientos de mayor confianza y obtener así conjuntos de muestras sin contaminar. Otra variante es el NAPSAC (N Adjacent Points Sample Consensus) (Myatt *et al.*, 2002), que orienta la selección aleatoria hacia agrupaciones de inliers. Esta variante no se apoya en información a priori sino en una heurística de adyacencia: un inlier tiende a estar *cerca* de otros inliers.

PROSAC (Progressive Sample Consensus) (Chum y Matas, 2005) ordena los datos atendiendo a un conocimiento previo. Las primeras muestras no son obtenidas de entre todos los datos sino de los mejores datos. Eso sí, las hipótesis se verifican frente a todos los datos. Los datos peor clasificados van siendo progresivamente incorporados. Este proceso de incorporación puede llegar hasta que la totalidad de los datos estén presentes. Este esquema proporciona un ahorro computacional significativo debido a que los datos de mayor confianza se exploran primero. En nuestro trabajo nos basamos en las estrategias NAPSAC y PROSAC que, junto con el método de obtención de arcos, serán descritas en el siguiente punto.

### 3. Detección de elipses con RANSAC

El algoritmo RANSAC presenta la capacidad de proporcionar un buen ajuste a partir de datos contaminados por una fracción de outliers superior al 50%, que es el límite infranqueable para otras técnicas de estimación robusta como LMedS.

El principio del algoritmo consiste en buscar el mejor modelo de elipse entre todos los puntos de contorno seleccionando aleatoriamente muestras de cinco puntos. Se calculan entonces los parámetros de la elipse que pasa por los puntos de la muestra y se establece el conjunto de consenso, es decir, los puntos en la imagen de contornos original que pertenecen a la elipse, calculados de acuerdo a un umbral de proximidad dado. Este procedimiento se repite  $K$  veces, como se muestra en la descripción del algoritmo básico que aparece en la tabla 1.

Después de  $K$  iteraciones, si el número de puntos del mejor conjunto de consenso encontrado es superior a un umbral preestablecido el modelo se asume como válido. Como los parámetros del modelo estimado por RANSAC no serán muy

Tabla 1. Algoritmo RANSAC

Hasta realizar  $K$  iteraciones

### I. Hipótesis

- (i) Obtener una muestra al azar de 5 puntos de contorno de entre todos los puntos de contorno.
- (ii) Calcular los parámetros de la elipse que se ajusta a esos 5 puntos.

### II. Verificación

- (iii) Determinar el conjunto de consenso, es decir, los puntos en la imagen de contornos que se ajustan a la elipse con una tolerancia.
- (iv) Si el número de inliers en el conjunto de consenso es el mayor encontrado, guardar los parámetros de este modelo.

End

precisos, al ser obtenidos a partir de únicamente cinco puntos, se suelen recalculan estos parámetros empleando técnicas de mínimos cuadrados sobre todo el conjunto de puntos que soportan ese modelo (Zhang 1997).

El número de iteraciones  $K$  puede determinarse a partir de la probabilidad  $P$  de encontrar al menos un conjunto bueno libre de outliers. El RANSAC es un algoritmo no determinista que proporciona un buen modelo sólo con una cierta probabilidad y esta probabilidad se incrementa cuantas más iteraciones se lleven a cabo. En general, al algoritmo se le añade algún criterio de parada, típicamente asociado al momento en el que el número de puntos en consenso sobrepasa un umbral preestablecido.

Si consideramos un número de puntos  $N$  con una fracción de inliers  $\varepsilon$ , la probabilidad de seleccionar una muestra con todos inliers es  $\varepsilon^s$ , siendo  $s$  el tamaño de la muestra y considerando que  $s \ll N$ . La probabilidad de no seleccionar una muestra formada totalmente por inliers será  $(1-\varepsilon^s)$  y  $(1-\varepsilon^s)^K$  la probabilidad de no seleccionar una muestra buena en  $K$  iteraciones. Entonces, la probabilidad de seleccionar una muestra no contaminada en  $K$  intentos al menos una vez será  $P = 1 - (1-\varepsilon^s)^K$ . Por tanto, el número de iteraciones que son necesarios para obtener el modelo con una probabilidad predeterminada  $P$  es:

$$K = \frac{\log(1-P)}{\log(1-\varepsilon^s)} \quad (1)$$

Para determinar el número  $K$  de iteraciones, se eligen normalmente valores de probabilidad  $P$  bastante conservadores, entorno al 95%

### 3.1. Filtrado de los segmentos de contorno

El RANSAC es un algoritmo muy apropiado para nuestro problema de ajuste de elipses ya que tolera una gran proporción de outliers. Sin embargo, la fracción inicial de inliers en las imágenes de los radiadores es tan exigua (a menudo por debajo del 10%) que el algoritmo requerirá una enorme cantidad de tiempo de ejecución, haciéndole inservible para nuestra aplicación.

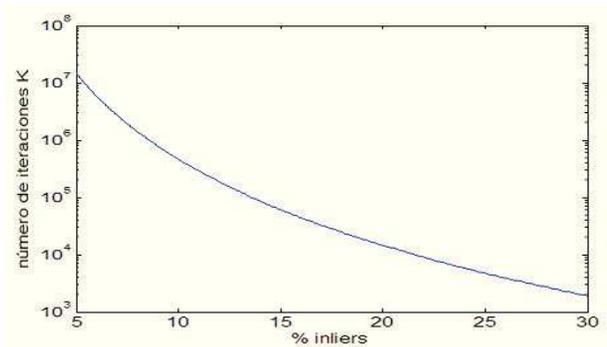


Figura 3: El número de iteraciones  $K$  necesarias para obtener una elipse con una probabilidad del 99% vs. el porcentaje de inliers en la imagen. Con el porcentaje habitual de inliers en nuestras imágenes, el número de iteraciones necesarias es aproximadamente de un millón.

El número de iteraciones  $K$  en (1) crece exponencialmente a medida que la fracción de inliers  $\varepsilon$  disminuye (figura 3). Debido a esta relación exponencial, una disminución, por pequeña que sea, en la cantidad de puntos espurios supondrá una reducción muy significativa en el número de iteraciones.

Por ello, antes de ejecutar el algoritmo RANSAC, hemos incluido una etapa de preprocesamiento con objeto de eliminar una fracción de outliers. La estrategia consiste en eliminar las cadenas de contorno que consideramos que no pertenecerán al contorno elíptico del moyú. Para ello, hemos incluido dos filtros: (i) análisis de la magnitud de la curvatura y (ii) análisis de la dirección de la curvatura en las cadenas de contornos.

Primero, se evalúa la curvatura en cada punto de los segmentos de contorno. El objetivo es analizar la magnitud de la curvatura para rechazar aquellos puntos que presenten una curvatura que no puede estar presente en una elipse que fuera originada por la proyección de un moyú en nuestra aplicación. Este proceso permite eliminar los contornos rectilíneos y dividir en segmentos curvos simples los contornos irregulares formados por porciones convexas y cóncavas.

Si consideramos un segmento de contorno como una curva digital parametrizada,

$$\sigma = (x(s), y(s)) \quad (2)$$

el vector tangente a la curva de contorno en un punto genérico  $P$  es:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial s} = (x'(s), y'(s)) \quad (3)$$

siendo la variación del vector tangente cuando un punto se desplaza a lo largo de la curva el vector de curvatura:

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial s^2} = (x''(s), y''(s)) \quad (4)$$

Tras las oportunas manipulaciones algebraicas, que omitimos, se obtiene la curvatura como:

$$\kappa = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \quad (5)$$

Entre las diferentes alternativas para estimar la curvatura en una curva digital (Hermann y Klette, 2006), hemos optado por la propuesta descrita en (Marji, 2003), que aproxima la curva digital localmente en cada punto mediante polinomios de 2º orden usando los puntos vecinos.

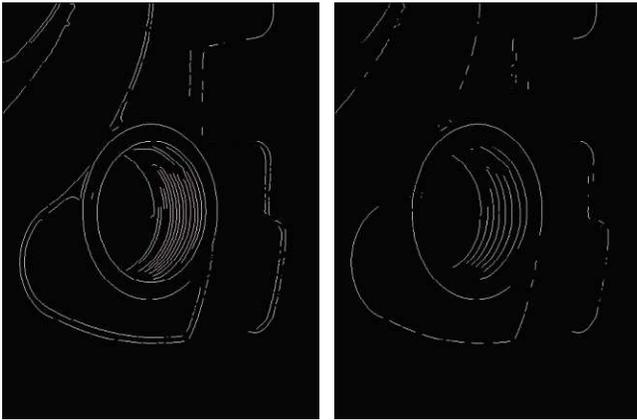


Figura 4: (a) Contornos resultantes tras filtrar las curvaturas por magnitud. El filtrado ha eliminado los puntos de contorno donde la magnitud de la curvatura es extremadamente baja (tales como los contornos rectos de las aletas) o alta (contornos correspondientes a esquinas). (b) Resultado final del filtrado tras analizar la compatibilidad de las direcciones del gradiente y curvatura.

Calculadas las curvaturas en cada punto de contorno, se han impuesto unos límites inferior y superior en la magnitud de la curvatura, con objeto de eliminar los contornos rectilíneos y esquinas que no pueden ser parte de la elipse buscada. La eliminación de los puntos con baja y elevada curvatura supone también la división de las cadenas de contornos con curvaturas irregulares en segmentos curvos simples, lo que facilitará la detección de elipses posterior (figura 4a). En los contornos resultantes, se analiza la dirección de la curvatura con objeto de comprobar su compatibilidad con la dirección del gradiente (figura 4b).

En el contorno elíptico correspondiente al borde exterior del moyú, la dirección del gradiente siempre apunta al interior, es decir, el gradiente y el vector de curvatura en este contorno siempre presentan la misma orientación a lo largo de toda la cadena de contorno (figura 5a). Este hecho permitirá excluir a todos los segmentos de contorno que no satisfacen esta condición (figura 5b). Sólo los segmentos con curvatura aproximadamente colineal con su gradiente serán preservados como candidatos de entrada para el proceso RANSAC (figura 5c).

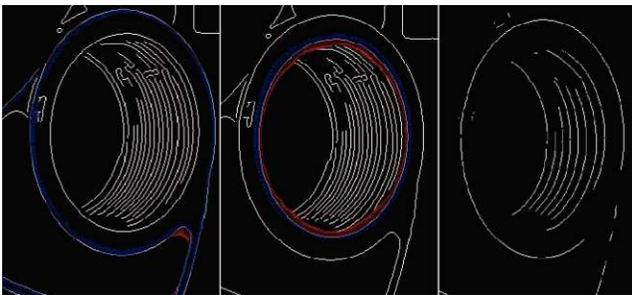


Figura 5: (a) Detalle de la imagen de contornos. El vector de curvatura y el gradiente han sido representados sobre las cadenas de contorno en rojo y azul respectivamente. En el contorno externo del moyú el gradiente y el vector de curvatura presentan la misma orientación. (b) Los segmentos de contorno, tales como el elipse interior del moyú, donde el gradiente y el vector de curvatura presentan sentido opuesto son eliminados en el filtrado. (c) Resultado final tras el filtrado de los contornos.

Tabla 2. El filtrado atendiendo a la curvatura de los contornos aumenta significativamente el ratio final de inliers. La tabla muestra los resultados obtenidos sobre las diez imágenes de la figura 6.

#imagen	$N_o$	$N_f$	$I_o$	$I_f$	$\epsilon_o$	$\epsilon_f$
0	6195	2334	638	636	10%	27%
1	5075	1902	443	414	9%	22%
2	5718	2383	642	642	11%	27%
3	4850	1658	469	469	10%	28%
4	3384	1383	432	418	13%	30%
5	7017	2811	596	575	8%	20%
6	6581	2616	589	559	9%	21%
7	4823	1641	361	359	7%	22%
8	7271	3098	599	571	8%	18%
9	4015	1398	309	284	8%	20%

$N_o$ : Número de puntos de contorno original

$N_f$ : Número de puntos de contorno tras el filtrado de curvatura

$I_o$ : Número de inliers en la imagen de contornos original

$I_f$ : Número de inliers tras el filtrado de curvatura

$\epsilon_o = I_o / N_o$ : Fracción original de inliers

$\epsilon_f = I_f / N_f$ : Fracción de inliers tras el filtrado de curvatura

Esta restricción resulta muy útil puesto que elimina un buen número de outliers. Además, reduce muy significativamente la probabilidad de detección de falsas elipses, debido a que se elimina la elipse interior del moyú, así como la mitad de los arcos de elipse paralelos originados por el roscado interno.

Las restricciones de magnitud y dirección de curvatura permiten excluir más del 50% de los outliers que están presentes en la imagen de contornos original (tabla 2), con el coste de eliminar un número poco significativo de inliers.

En la imagen número 4 (figura 6) se ha eliminado un mayor número de inliers debido a la excentricidad del contorno elíptico. En este caso, dada la baja curvatura del contorno en algunos puntos, estos han sido considerados como pertenecientes a un segmento rectilíneo y han sido borrados. En aquellos modelos de radiador donde las aletas se unen al contorno exterior del moyú (imágenes 1, 5, 6, 8, 9 en figura 6) se aprecia también una disminución del número de inliers, debido en este caso a la eliminación de los puntos de la unión de las aletas con el moyú. Este efecto puede apreciarse con detalle en la figura 5c.

### 3.2. Mejoras del algoritmo RANSAC

El filtrado que hemos realizado reduce significativamente la cantidad de outliers. La eliminación de cadenas de contorno incompatibles aumenta aproximadamente el porcentaje de inliers desde el original 10% hasta el 20% (tabla 2). No obstante, esta relación todavía es muy pequeña si se quiere localizar la elipse en un tiempo razonable.

El tiempo consumido por el algoritmo RANSAC es el producto del número de hipótesis consideradas por el tiempo necesario para generar y evaluar estas hipótesis. En la ecuación (1) se ha mostrado que, para una probabilidad de éxito determinada, el número de hipótesis depende del tamaño de la muestra y de la proporción de inliers en el conjunto de datos. En nuestro caso, con un porcentaje final de inliers de alrededor del 20% y con el tamaño considerable de las muestras ( $s=5$ ), el algoritmo RANSAC debería requerir alrededor de 15.000

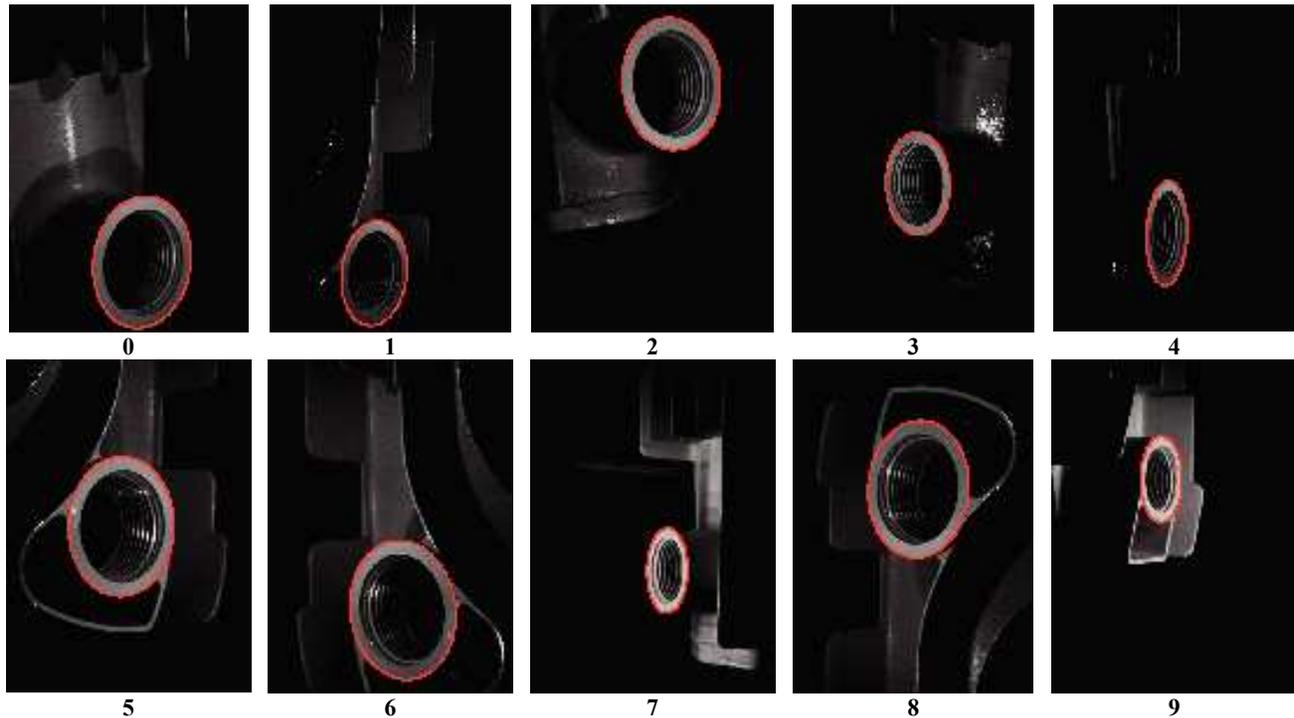


Figura 6: Diez imágenes de diferentes modelos de radiador adquiridas bajo diferentes ángulos y distancias. Las elipses detectadas se han superimpresionado sobre las imágenes originales.

iteraciones para encontrar una muestra no contaminada con una probabilidad de 0.99.

El algoritmo RANSAC estándar toma muestras a partir del conjunto de datos de entrada de una forma uniforme. Sin embargo, como ya se ha discutido en el apartado 2, la eficiencia del algoritmo estándar puede ser significativamente mejorada si la elección de las muestras se guía de alguna manera en vez de hacer un muestreo aleatorio.

### 3.3 Algoritmo RANSAC modificado propuesto

En nuestro algoritmo RANSAC modificado, los puntos de contorno en la imagen no van a tener la misma probabilidad de ser seleccionados. Inicialmente consideraremos como candidatos para la selección aquellos puntos que se encuentren sobre segmentos de contorno que consideramos de más confianza. Siguiendo la filosofía del algoritmo PROSAC, ordenaremos los segmentos de contorno de la imagen de acuerdo a un índice de calidad. Un primer e inmediato indicador de calidad de un segmento de contorno es su longitud. Debido a que el filtrado tenía por objeto la eliminación de los puntos de contorno donde la curvatura tomaba valores muy altos o muy bajos, un contorno que mantiene una buena longitud tras el filtrado indica que tiene una curvatura en todos sus puntos acorde con la de la elipse que estamos buscando. En general, el contorno exterior del moyú no será fragmentado en la fase de filtrado debido a que la curvatura en todos sus puntos no excede los límites aceptables. Sin embargo, aquellos segmentos de contorno que incluyan esquinas o porciones rectilíneas, se eliminarán o serán partidos en varios fragmentos menores.

Por tanto, aunque la longitud de un segmento de contorno no sea una característica completamente determinante debido a la posibilidad de fragmentación, lo normal, si esto ocurre, es que

alguno de esos fragmentos sea suficientemente largo como para ocupar una buena posición dentro del ranking de candidatos. Si llegara a darse la situación de que todos los fragmentos son de poca longitud, eso tampoco supondría el fallo de nuestro procedimiento RANSAC modificado, sino que simplemente el algoritmo requeriría de más iteraciones en esta situación, porque serían los contornos más largos los que primero se examinarían.

Siguiendo una estrategia basada en la descrita en (Chum *et al.*, 2005), el algoritmo escoge inicialmente dos puntos entre el conjunto de puntos pertenecientes al contorno mejor clasificado (ver figura 7). Conforme avanza el proceso iterativo, se van incorporando paulatinamente el resto de segmentos de contorno, de tal forma que se garantice que el proceso converja hacia un algoritmo RANSAC si se da el peor de los escenarios, es decir, garantizar que todos los puntos en esta fase del algoritmo hayan tenido la misma probabilidad de ser seleccionados.

Adoptando la estrategia tipo NAPSAC, los otros tres puntos necesarios para formar la muestra que determina una elipse, se elegirán aleatoriamente, pero sólo de entre los puntos de los segmentos a los que pertenecen los dos primeros. Debido al hecho de que los inliers de la imagen normalmente aparecen localizados sobre uno o a lo sumo dos segmentos de contorno, esta estrategia es razonable para aumentar la posibilidad de seleccionar una muestra no contaminada. De esta forma, puede decirse, como en (Hahn *et al.*, 2008), que el modelo de la elipse se estima en el nivel de segmentos de curva en vez de la estrategia tradicional a nivel de punto individual.

Una vez obtenida la muestra de cinco puntos como se ha indicado, se evalúa la calidad de la elipse hipotética obtenida frente a todos los puntos de contorno como en el RANSAC estándar. El proceso iterativo continúa con la selección de una nueva muestra y evaluación del modelo pero incorporando progresivamente segmentos de menor longitud.

Finalmente, como criterio de parada, utilizamos un umbral que determina el número mínimo de puntos que deben formar parte del consenso, calculado de forma experimental para esta aplicación. A este umbral, se le añade una condición, por la cual, al menos un 15% de los inliers deben estar presentes en cada uno de los cuatro cuadrantes de la elipse. Este criterio de parada se ha mostrado lo suficientemente robusto, no habiéndose establecido un límite mínimo en el número de muestras extraídas como se sugiere en (Chum *et al.*, 2005).

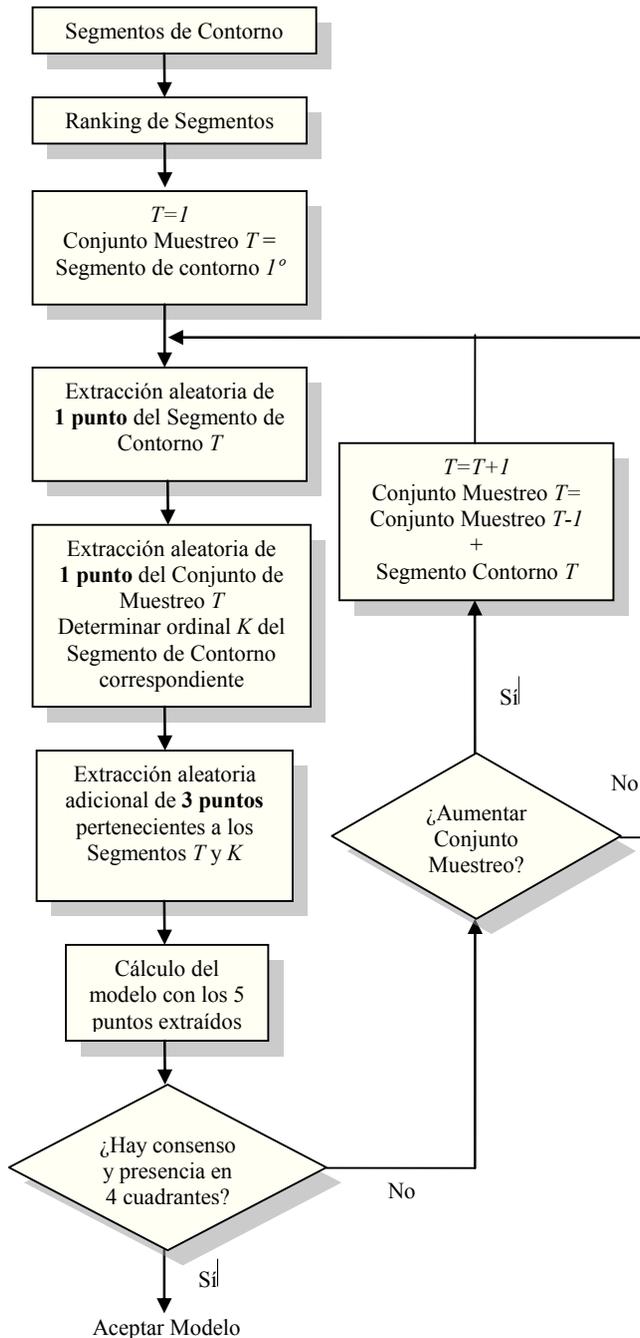


Figura 7: Diagrama de flujo del algoritmo

#### 4. Estimación de la posición 3D

Una vez que se ha detectado el contorno elíptico siguiendo el procedimiento RANSAC presentado, es preciso determinar la transformación que relaciona la elipse hallada con la geometría circular del moyú en el espacio.

Las elipses se han empleado con profusión para calcular propiedades métricas sobre la cámara y la escena, debido a que presentan el grado más bajo entre las curvas algebraicas y a que son invariantes ante transformaciones proyectivas. Además, las cuádricas y cónicas han sido muy estudiadas dentro de la geometría proyectiva, lo que ha proporcionado una teoría matemática sobre ellas muy completa (Mundy y Zisserman, 1992). Muchos trabajos han señalado estas interesantes características de las cónicas y desarrollado, a partir de ellas, procedimientos para estimación de la posición, calibración de cámaras, estereovisión y análisis de movimiento.

La elipse detectada puede expresarse mediante una ecuación de la forma:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2f(Dx + Ey) + f^2F = 0 \quad (6)$$

donde  $f$  es una constante arbitraria.

Si definimos el vector  $\vec{x}$  y la matriz  $\mathbf{Q}$  como:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x/f \\ y/f \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{bmatrix} \quad (7)$$

empleando el producto escalar, (6) puede escribirse de forma compacta como:

$$(\vec{x}, \mathbf{Q}\vec{x}) = 0 \quad (8)$$

El problema consiste en determinar la orientación del plano que contiene el círculo y la posición 3D de su centro respecto del sistema de coordenadas de la cámara.

Si la elipse  $\mathbf{Q}$  representa la proyección de un círculo, los tres autovalores de  $\mathbf{Q}$  cumplen la condición:  $\lambda_3 < 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$ . El vector normal del círculo  $\vec{n}$  puede ser estimado a partir del siguiente teorema, cuyos detalles y prueba se encuentran en (Kanatani y Liu, 1993). Sean  $\vec{u}_2$  y  $\vec{u}_3$  los autovectores unitarios asociados a los autovalores  $\lambda_2$  y  $\lambda_3$ , respectivamente, entonces la normal del círculo  $\vec{n}$  viene dada por:

$$\vec{n} = \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_3}} \vec{u}_2 + \sqrt{\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3}} \vec{u}_3 \quad (9)$$

Puesto que los signos de los autovectores  $\vec{u}_2$  y  $\vec{u}_3$  son arbitrarios y generalmente  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  existen dos interpretaciones 3D. Observar el moyú desde la posición frontal real genera la misma elipse que si virtualmente pudiésemos observarla situándonos por detrás del moyú. La orientación correcta se determina fácilmente analizando los valores del vector  $\vec{n}$ .

La distancia del plano soporte del círculo al centro óptico de la cámara puede calcularse debido a que el radio  $\rho$  del moyú es conocido. Este radio es constante para todos los modelos de

radiadores fabricados. Viene determinada, medida en unidades de longitud focal, por:

$$d = \sqrt{\lambda_1^3} \rho \quad (10)$$

El centro del moyú se proyecta sobre la imagen en la posición (Kanatani y Ohta, 2004):

$$\vec{x}_c = Q^{-1} \cdot \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \quad (11)$$

Por último, la posición 3D del centro del moyú con respecto al sistema de coordenadas de la cámara es:

$$\vec{r}_c = \frac{d \cdot \vec{x}_c}{\left( \vec{x}_c, \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right)} \quad (12)$$

## 5. Resultados experimentales

Se han llevado a cabo numerosas pruebas con imágenes adquiridas bajo diferentes condiciones. El algoritmo de detección de elipses y de cálculo de la posición 3D del moyú ha sido implementado en C++, utilizando a su vez funciones de la librería de programación OpenCV (OpenCV, 2011). Las pruebas se han ejecutado sobre un PC con un procesador Intel Pentium IV 3.73 GHz. El tamaño de las imágenes es de 640x480. Las prestaciones del algoritmo propuesto han sido evaluadas tanto en términos de tiempo de computación como de exactitud en la estimación de la posición.

### 5.1 Coste computacional

La figura 6 muestra algunas imágenes de test con la elipse detectada, que han sido empleadas para analizar el tiempo de cálculo del algoritmo propuesto. Las imágenes, que incluyen diferentes modelos de radiador, fueron adquiridas bajo diferentes ángulos y distancias.

Con objeto de comparar las prestaciones del algoritmo RANSAC estándar con nuestro método, hemos aplicado el mismo preprocesamiento para eliminar los mismos segmentos incompatibles y partir de los mismos datos de entrada en ambos algoritmos. El criterio de parada es en ambos casos el mismo. Los resultados de los experimentos se muestran en la tabla 3 que muestra número mínimo, máximo y promedio de iteraciones en diez ensayos en ambos algoritmos. El tiempo medio de ejecución se presenta también. En comparación con el algoritmo RANSAC ordinario, nuestro enfoque resulta un promedio de alrededor de veinte veces más rápido. No se ha incluido una comparación con el algoritmo PROSAC de (Chum *et al.*, 2005) puesto que no podemos establecer que nuestro enfoque sea superior, ya que este se ha adaptado específicamente para la resolución de esta aplicación concreta.

El tiempo de ejecución del algoritmo RANSAC estándar depende de la cantidad de inliers, pero en nuestro método depende básicamente del éxito en la ordenación definida sobre los segmentos de curva. Cuando el contorno del moyú no ha sido fragmentado ni en la extracción, ni en el subsiguiente filtrado de curvaturas, este contorno ocupará una buena posición en el ranking (generalmente el primero) y el modelo de la elipse será encontrado rápidamente. En otro caso, el procedimiento iterará hasta que se alcancen otras posiciones correspondientes a segmentos más cortos. Incluso en este caso, en el que la segmentación de la curva sobre la imagen no es óptima, nuestro algoritmo es alrededor de diez veces más rápido.

Tabla 3: Número de iteraciones y tiempo de ejecución de nuestro algoritmo comparados con RANSAC estándar. Los resultados corresponden a las imágenes de la figura 6.

# img	RANSAC estándar				Algoritmo propuesto				Speed Up
	$\bar{K}$	min	max	$\bar{T}$	$\bar{K}$	min	max	$\bar{T}$	
0	438	68	1088	875	24	5	57	98	9.0
1	1655	62	3427	3310	37	4	84	125	26.5
2	557	166	2518	1113	4	1	11	57	19.4
3	272	26	579	544	4	1	9	57	9.5
4	314	71	994	627	4	1	10	58	10.7
5	1192	164	3957	2384	4	1	16	59	40.7
6	1592	154	4881	3184	15	4	38	81	39.5
7	1336	66	3535	2671	3	1	8	57	47.0
8	2102	814	3841	4203	34	14	56	118	35.7
9	1071	23	2654	2142	18	2	53	86	24.9

$\bar{K}$	Número de iteraciones promedio en 10 ejecuciones.
min	Número mínimo de iteraciones.
max	Número de iteraciones máximo.
$\bar{T}$	Tiempo de ejecución promedio (en ms).
SpeedUp	Aceleración relativa al RANSAC estándar.

### 5.2 Precisión

Se ha evaluado la precisión 3D del algoritmo empleando una guía motorizada lineal sobre la que se ha montado una mesa giratoria que soporta un elemento de radiador seccionado (figura 8). Este montaje mecánico permite controlar la rotación y desplazamiento del moyú conociendo con exactitud su posición cuando se adquieren las imágenes.

La cámara se ha calibrado utilizando la implementación en OpenCV (Bouguet, 2010) basada en el trabajo descrito en (Zhang, 1998), usando una mira tipo tablero de ajedrez.

Se han llevado a cabo dos experimentos diferentes. En la primera prueba, se ha estimado el plano soporte sobre el que se encontraría el contorno del moyú con el elemento de radiador girado con diferentes ángulos. El elemento se ha girado sobre la mesa controlada manteniendo constante la distancia entre el centro del moyú y la cámara. Se ha adquirido una serie de noventa imágenes. En la primera imagen de la serie, el moyú fue adquirido frontalmente, de forma que en ella el contorno aparece como una circunferencia perfecta. Para las siguientes tomas de la serie, el ángulo del moyú se ha rotado un grado hasta que el contorno elíptico ha degenerado en una línea vertical.



Figura 8: Guía lineal con mesa rotatoria empleada para controlar la rotación y desplazamiento del moyú en las pruebas.

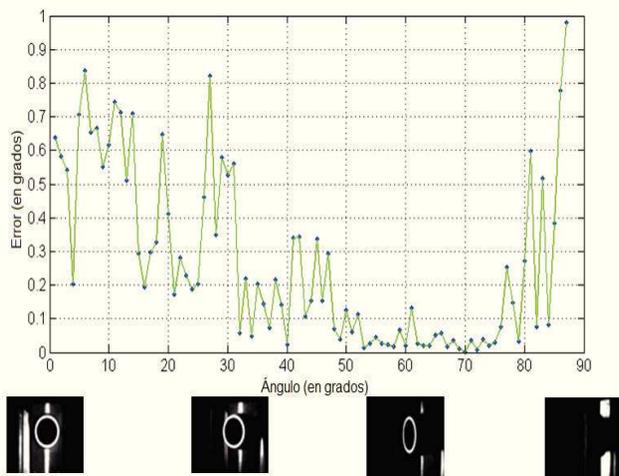


Figura 9: Error en la estimación de la normal del plano soporte de la elipse vs. el giro del moyú ante la cámara.

Los resultados en la figura 9 muestran que el error de la estimación de la normal está por debajo de un grado. El error es especialmente bajo en el entorno nominal de trabajo de la aplicación real, cuando la normal del plano soporte del contorno del moyú forma alrededor de 60 grados con el eje óptico de la cámara. El motivo de esta mayor exactitud en este rango es que el sistema de iluminación ha sido diseñado para trabajar en este ángulo.

Cuando el ángulo abandona la región de trabajo, el contraste de la imagen en el borde del moyú disminuye y la detección de los contornos se hace menos precisa. Al acercarse el ángulo a los noventa grados, el error aumenta significativamente debido a que la elipse degenera en una recta.

Se ha llevado a cabo un segundo experimento para establecer la precisión en la estimación del centro del moyú en el espacio. Se ha trasladado el elemento de radiador sobre la guía lineal en un rango de  $[-60,60]$  mm desde su posición nominal de trabajo. Se ha adquirido una imagen cada 1.5 mm, obteniendo una serie de 80 imágenes. El ángulo entre el moyú y el eje óptico de la cámara se ha mantenido constante durante el experimento a unos 60° aproximadamente.

Los resultados de los errores en la normal estimada en este experimento, en el que sólo interviene la traslación, se muestran en la figura 10, donde puede apreciarse que el error también se mantiene por debajo de un grado.

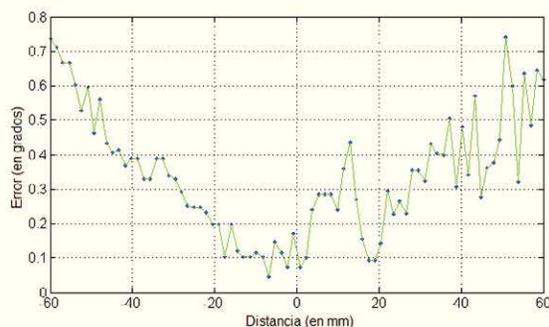


Figura 10: Error en la estimación del plano soporte a diferentes distancias cuando el moyú se traslada en el rango  $[-60,60]$  mm desde su distancia de trabajo nominal.

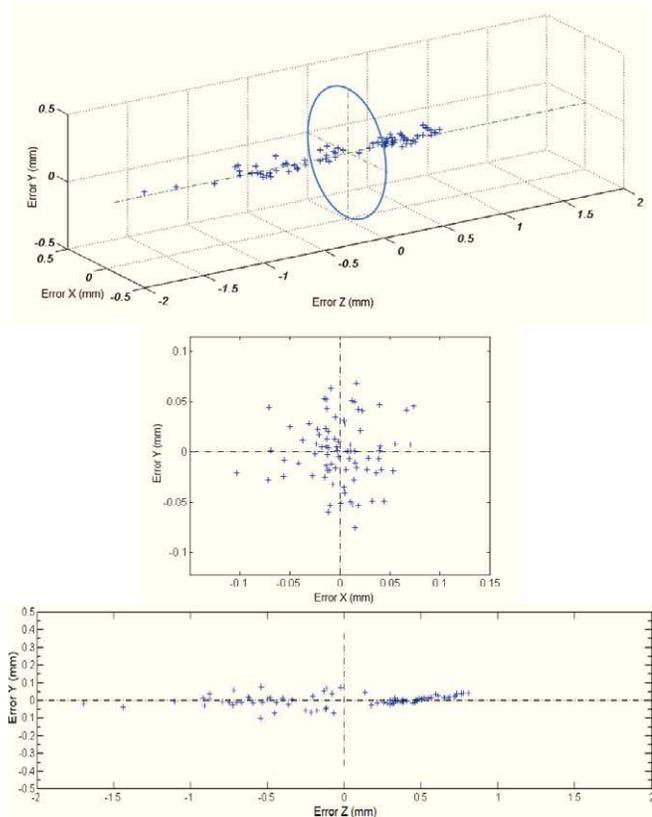


Figura 11: (a) Errores en las posiciones estimadas del centro del moyú en una serie sometida a traslación. (b) Desviación lateral. (c) Error en la estimación de la profundidad.

También se han representado en la figura 11 los errores en las posiciones estimadas de los centros de los moyús en cada una de las imágenes captadas en esta prueba de traslación. El error en el plano XY (figura 11b), correspondiente a la desviación lateral en la estimación de la posición del centro del moyú, es insignificante, puesto que se mantiene siempre por debajo de 0.1 mm. El error en la estimación de la profundidad es mucho mayor. Aunque en la mayoría de las posiciones (77 observaciones de 80) se mantiene con valores inferiores a 1 mm, alcanza 1.7 mm en una de las posiciones (figura 11c). No obstante, este valor es perfectamente asumible en nuestra aplicación pues la trayectoria de acercamiento del robot se realiza según la perpendicular al moyú y el instante de contacto en el que se produce el sellado es controlado, a mayores, por un micrómetro laser.

## 6. Conclusiones

En este artículo se han presentado los algoritmos desarrollados para resolver una aplicación de robótica industrial que requiere de la estimación de la posición 3D de un patrón circular. Para ello en primer lugar ha sido preciso resolver un problema de detección de elipses en la imagen empleando una técnica de tipo RANSAC.

Las prestaciones del algoritmo RANSAC tradicional han debido mejorarse debido a la complejidad de las imágenes y a las limitaciones de tiempo para la ejecución.

El algoritmo presentado proporciona un ahorro computacional muy significativo. En comparación con los algoritmos RANSAC tradicionales nuestra adaptación resulta alrededor de veinte veces

más rápida. El bajo coste computacional para detectar la elipse (alrededor de 0,07s promedio medido *in situ* en la aplicación real) hace que el algoritmo sea válido para su utilización en sistemas de visión de industriales. La eficacia del algoritmo ha sido evaluada en la estimación de la posición 3D de un elemento circular en una aplicación robótica compleja. Los resultados muestran que el método no sólo es computacionalmente eficiente sino que también es robusto, pues no se detectan falsas elipses en unas imágenes que contienen una gran cantidad de contornos espurios.

Aunque nuestro algoritmo se ha desarrollado para su aplicación en un problema industrial concreto, la estimación de la posición en el espacio de piezas con patrones circulares es un problema frecuente en entornos industriales. Consideramos que las mejoras presentadas en la detección de elipses en la imagen, lógicamente adaptadas a cada caso particular, pueden ayudar a cumplir las restricciones de tiempo incluso en aquellas situaciones donde las escenas son realmente complejas.

### English Summary

#### Efficient ellipse detection. Application to the 3D pose estimation of an industrial robot.

#### Abstract

In this paper, we present a ellipse detection algorithm developed to measure the 3-D position of a circular feature in a robotic application. The algorithm uses a RANSAC stochastic procedure whose efficiency has been significantly improved, substituting the random sampling with a guided sampling on the curve segments in the image. The contours of the image are first split analyzing their curvature. Then the curve segments are sorted according to their likelihood to be part of the ellipse. We have used the length as a prior indicator of this likelihood. The RANSAC algorithm starts considering only the longer curve segments whilst shorter curve segments are progressively incorporated. This strategy notably diminishes the amount of samples needed and makes the algorithm suitable for real time.

#### Keywords:

Visual Pattern Recognition, Robust Estimation, Robot Vision, Industrial Robots.

### Referencias

- Ballard D.H., 1981. Generalizing the Hough transform to detect arbitrary shapes. *Pattern Recognition*. Vol.13, No. 2, p. 111-122.
- Bouguet, J.Y., 2010. Camera calibration toolbox for matlab. Disponible en: [http://www.vision.caltech.edu/bouguetj/calib\\_doc/](http://www.vision.caltech.edu/bouguetj/calib_doc/).
- Chaumette F., Hutchinson S., 2006. Visual servo control, part I: Basic approaches. *IEEE Robotics and Automation Magazine*, 13, 4, 82-90.
- Cheng, Z., Liu, Y., 2004. Efficient technique for ellipse detection using restricted randomized Hough transform. In: *Proceedings of International Conference on Information Technology*, 2, 714–718.
- Chum, O., Matas, J., 2005. Matching with PROSAC - progressive sampling consensus. In *Proc. of the CVPR 2005*.
- DeSouza G.N., Kak A.C., 2002. Vision for mobile robot navigation: A survey. *IEEE Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 24, 2, 237-267.
- Fischler, M.A., Bolles, R.C., 1981. Random sample consensus: A paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography. *Comm. ACM*, 24, 6, 381–395.
- Fitzgibbon A., Pilu M., Fisher R.B., 1999. Direct least square fitting of ellipses, *IEEE Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 21, 5, 476–480.
- Fuente, E. de la, 2011. Robot guiado por visión. Video disponible en <http://www.youtube.com/watch?v=RGyxOSdhNm8>.
- Gracia L., Pérez C., 2010. Revisión de esquemas de control visual y propuesta de mejora. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, 7, 2, 57-67.
- Halir R., Flusser J., 1998. Numerically stable direct least squares fitting of ellipses. 6th Int. Conf. in Central Europe on Computer Graphics and Visualization, 125–132.
- Hahn, K., Jung, S., Han, Y., Hahn, H., 2008. A new algorithm for ellipse detection by curve segments. *Pattern Recognition Letters* 29, 13, 1836-1841.
- Hartley R., Zisserman R., 2004. *Multiple View Geometry in Computer Vision*. Cambridge University Press.
- Hermann, S., Klette, R., 2006. A comparative study on 2d curvature estimators. Research report CITR-TR-183, CITR, The University of Auckland, New Zealand.
- Hough, P.V.C., 1962. Method and means for recognizing complex patterns. U.S. Patent 3069654.
- Illingworth, J., Kittler, J., 1998. A survey of the Hough transform. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 44, 87–116.
- Kanatani, K., Liu, W., 1993. 3D interpretation of conics and orthogonality, *CVGIP: Image Understanding*. 58, 3, 286–301.
- Kanatani, K., Ohta, N., 2004. Automatic detection of circular objects by ellipse growing. *International Journal of Image and Graphics* Vol. 4, No. 1 pp. 35–50.
- Liu, Z., Qiao, H., 2009. Multiple ellipses detection in noisy environments: A hierarchical approach. *Pattern Recognition*, 42, 11, 2421-2433.
- Mai, F., Hung Y.S., Zhong, H., Sze, W.F., 2008. A hierarchical approach for fast and robust ellipse extraction. *Pattern Recognition*, 41, 8, 2512–2524.
- Marji, M., 2003. On the detection of dominant points on digital planar curves. PhD thesis, Wayne State University, Detroit, Michigan.
- McLaughlin, R.A., 1998. Randomized Hough transform: improved ellipse detection with comparison. *Pattern Recognition Letters* 19, 299–305.
- McLaughlin, R.A., Alder, M.D., 1998. The Hough transform versus the UpWrite. *IEEE Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 396–400.
- Miguel Trespaderne, F., Fuente, E. de la, 2009. Visually guided robot for radiator sealing. *IEEE International Conference on Emergent Technologies and Factory Automation*.
- Myatt, D.R., Torr, P.H.S., Nasuto, S.J., Bishop, J.M., Craddock, R., 2002. Napsac: High noise, high dimensional robust estimation - it's in the bag. *BMVC02*, 2, 458–467.
- Mundy, J.L., Zisserman, A., 1992. Eds., *Geometric Invariance in Computer Vision*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, USA.
- OpenCV, 2011. Open Source Computer Vision Library. Disponible en: <http://sourceforge.net/projects/opencvlibrary/>.
- Rosenhahn B., Perwass C., Sommer G., 2004. CVonline: Foundations about 2D-3D pose estimation. Disponible en: <http://homepages.inf.ed.ac.uk/rbf/CVonline/>.
- Rosin P.L., West G.A.W., 1995. Nonparametric segmentation of curves into various representations. *IEEE Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 17, 12, 1140–1153.
- Rousseeuw, P.J., Leroy, A.M., 1987. *Robust Regression and Outlier Detection*. Wiley.
- Soria C., Roberti F., Carelli R., Sebastián J.M., 2008. Control Servo-Visual de un Robot Manipulador Planar Basado en Pasividad. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, 5, 4, 54-61.
- Thanh N. M., Ahuja S., Wu Q. M. J., 2009. A real-time ellipse detection based on edge grouping. *IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*, 3280-3286.
- Tordoff, B., Murray, D.W., 2002. Guided sampling and consensus for motion estimation. In *Proc 7th European Conf on Computer Vision*, Copenhagen, 82–98.
- Xu, L., Oja E., Kultana, P., 1990. A new curve detection method: randomized Hough transform (RHT). *Pattern Recognition Letters*, 11, 5, 331–338.
- Zhang Z., 1997. Parameter estimation techniques: a tutorial with application to conic fitting. *Image and Vision Computing* 15, 59–76.
- Zhang Z., 1998. A Flexible New Technique for Camera Calibration. Microsoft Research Technical Report MSR-TR-98-71, Microsoft Corporation.