



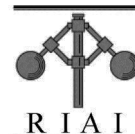
ELSEVIER



CrossMark

ScienceDirect

Disponible en www.sciencedirect.com



www.elsevier.es/RIAI

Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial 12 (2015) 467–475

Diseño y sintonización de una ley de control borrosa proporcional retardada: enfoque frecuencial

R. Villafuerte*, J. A. Ortega Melo

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo (UAEH)

Centro de Investigación en Tecnologías de Información y Sistemas (CITIS)

Carr. Pachuca-Tulancingo Km. 4.5 s/n Col. Carboneras, Mineral de la Reforma, Hidalgo, México, C.P. 42184

Resumen

Los retardos son por lo general un fenómeno indeseable en los procesos de control, debido a que estos pueden inestabilizar o producir un desempeño deficiente en la respuesta de un sistema. Sin embargo, los retardos también tienen la propiedad de coadyuvar a su estabilización. El presente artículo se beneficia de esta propiedad al proponer el diseño y sintonización de una ley de control borrosa proporcional retardada (BPR) para estabilizar una clase de sistemas no lineales. En este marco, la estabilidad del sistema no lineal se garantiza mediante la σ -estabilización de su modelo borroso del tipo Takagi-Sugeno (TS) en lazo cerrado con la ley de control BPR. El diseño del controlador BPR se propone a partir de la inclusión de una acción retardada en la estructura clásica, mientras que la sintonización del mismo se realiza asegurando σ -estabilidad sobre cada uno de los subsistemas del modelo borroso empleando el método D-particiones. La σ -estabilización del sistema TS-BPR se garantiza mediante un análisis del lugar geométrico de las raíces de su cuasipolinomio característico. La metodología sólo es aplicable a sistemas no lineales que se puedan modelar mediante subsistemas borrosos lineales de segundo orden. El diseño y la sintonización del controlador BPR se ejemplifican sobre una plataforma experimental carro-péndulo. El desempeño del BPR es comparado con una clásica compensación paralela distribuida (PDC, Parallel Distributed Compensation). *Copyright © 2015 CEA. Publicado por Elsevier España, S.L.U. Todos los derechos reservados.*

Palabras Clave: Sistemas de control no-lineal, sistemas borrosos, sistemas con retardos, controlador borroso PR.

1. Introducción

El diseño de controladores eficientes para manipular sistemas complejos siempre ha sido un desafío de investigación, sobre todo porque el ser humano tiende a crear sistemas cada vez más sofisticados con el fin de cubrir sus necesidades cotidianas. En el marco de esta clase de sistemas se encuentran los sistemas subactuados (Spong (1998)), los cuales se caracterizan por poseer menos actuadores que grados de libertad, además de que algunos son inherentemente no lineales. Uno de los sistemas académicos más conocidos es el sistema carro-péndulo (Aracil y Gordillo, 2005). Es claro que la dinámica de esta clase de sistemas y el diseño de sus controladores constituye un problema de investigación muy notable.

Típicamente, el diseño de controladores lineales para sistemas no lineales es de carácter local, lo que restringe su manipulación sólo a una vecindad cercana a su punto de operación. Así, el desarrollo de técnicas de control no lineal (Slotine y Li,

1991) para manipular esta clase de sistemas lejos de su punto de operación, surge como alternativa natural. Sin embargo, el diseño de controles no lineales suele ser complejo y su implementación requiere de un esfuerzo mayor. La metodología propuesta por Takagi-Sugeno permite emplear técnicas semejantes a las implementadas en el control de sistemas lineales para estabilizar sistemas no lineales (Tanaka y Wang, 2001) lejos de su punto de operación, facilitando así su diseño y análisis.

Los modelos borrosos TS surgen como una metodología formal para generar reglas borrosas a partir de dinámicas locales de un sistema no lineal mediante subsistemas lineales, lo que conduce a la posibilidad de manipular adecuadamente al sistema no lineal empleando técnicas semejantes a las implementadas en el control de sistemas lineales, tal como el controlador proporcional derivativo (PD).

El control PD tiene muchos usos tales como el seguimiento de trayectoria (Lin et al., 2009) o el control de posición de servomotores de CD mediante PD autosintonizados (Simhachalam et al., 2012). Entre las variantes del PD clásico encontramos el PD borroso que se emplea para controlar servos en sistemas electro-hidráulicos sujetos a fricción no lineal (Huang et al.,

* Autor para Correspondencia: R. Villafuerte
Correo electrónico: villafuerte@uaeh.edu.mx (R. Villafuerte)

2007), en estabilización de plataformas de barco (Leghmizi y Sheng, 2012), en control remoto vía Web de sistemas no lineales inestables de laboratorio (planta de barra y bola) (Guinaldo et al., 2010), en el diseño de controles inteligentes mediante modelos TS para estabilizar el péndulo invertido (Aranda et al., 2014), entre otros.

En la literatura, existe un gran cantidad de temas disponibles sobre la sintonización de controladores PD; entre los más conocidos se encuentran las fórmulas propuestas por Ziegler-Nichols (Ziegler y Nichols, 1942), de naturaleza experimental. Algunos refinamientos heurísticos de estas fórmulas se dan en (Hang et al., 1991), para mejorar el desempeño de la autosintonización.

Aunque el control PD es relativamente simple, su implementación requiere de la disponibilidad de la posición (acción proporcional) y de la velocidad (acción derivativa) de la salida de un sistema de una entrada una salida (SISO, single input single output). La velocidad usualmente se obtiene mediante instrumentos de medición que suelen ser ruidosos o mediante algoritmos de aproximación como los observadores, los cuales incrementan tanto el costo como la dificultad de diseño de sus controladores. Alternativamente, en (Berghuis y Nijmeijer, 1993) se presenta una solución para el problema de regulación de robots rígidos basados en la disponibilidad de las mediciones únicamente de las juntas. En (Kelly et al., 1994) se propone el empleo de un filtro pasa altas. En (Nicosia y Tomei, 1994) se desarrolla un controlador basado en la realimentación de las dinámicas de salida semiglobal, el cual garantiza un seguimiento asintótico de trayectoria acotada.

Los resultados mencionados anteriormente son algunas variantes que se pueden emplear cuando sólo se tiene disponible la posición y cuando la velocidad no se puede obtener fácilmente. Un enfoque diferente es sustituir la acción derivativa por una acción retardada, es decir, emplear un PR en lugar de un PD y así emplear la propiedad que tienen los retardos para estabilizar un sistema. Por lo general, se considera que un retardo únicamente induce inestabilidad o un mal desempeño, pero en (Cooke y Grossman, 1982) y (Abdallah et al., 1993) se proponen algunos criterios bajo los cuales un sistema permanece estable ante la presencia de retardos.

Una ley de control PR, no es un tópico nuevo ya que éste se ha estudiado desde hace muchos años en (Suh y Bien, 1979), (Suh y Bien, 1980), (Swisher y Tenqchen, 1988), (Abdallah et al., 1993), (Zhong y Li, 2002) y más recientemente en (Villafuerte et al., 2013). En estas últimas citas se muestra cómo las acciones del PR pueden mejorar el desempeño de una planta en comparación con el efecto producido por las acciones del PD. Además, los controladores PR evitan el empleo de las técnicas ya mencionadas para la estimación de la velocidad, que suelen introducir ruido o incrementar el coste de diseño de los controladores. Más aún, su implementación requiere sólo de registros de memoria y es relativamente sencillo de programar e implementar. Sin embargo, el empleo de controladores PR permuta el análisis de un polinomio característico por el de un cuasipolinomio característico. En (Wang y Hu, 2008) y (Dellnitz et al., 2002) se muestran algunos métodos numéricos para aproximar las raíces de funciones analíticas.

Si bien la ley de control PR propuesta en (Villafuerte et al., 2013) ha demostrado tener buen desempeño sobre sistemas de primer y segundo orden, ésta sólo puede aplicarse a sistemas lineales. La metodología propuesta basada en modelos TS permite extender el campo de aplicación de este tipo de controladores a una amplia clase de sistemas no lineales.

Una ley de control PR aplicada a sistemas borrosos TS origina sistemas borrosos con retardos. Existen numerosos resultados sobre el análisis de esta clase de sistemas, por ejemplo en (Zhao et al., 2009) se presenta un enfoque para resolver el problema de estabilidad y estabilización para sistemas borrosos dependientes del retardo; por otro lado, en (Cao y Frank, 2000) se muestran ciertas condiciones de estabilidad usando el enfoque de Lyapunov-Krasovskii. Otros resultados relevantes sobre sistemas borrosos con retardos en la entrada se dan en (Chiang, 2006) y (Zhao y Gao, 2012); en el primero se emplea un controlador descentralizado robusto basado en el modelo borroso y en el segundo los resultados se formulan en forma de desigualdades matriciales lineales (LMIs por sus siglas en inglés), las cuales suelen ser conservativas (Mondié et al., 2011). Cabe señalar que el análisis de sistemas borrosos con retardos en el marco frecuencial es un tópico poco atendido en la literatura.

En el presente artículo se presentan resultados referentes al diseño y sintonización de una ley de control BPR para estabilizar una clase de sistemas no lineales de segundo orden. La sintonización de la ley de control BPR se realiza empleando los resultados propuestos en (Villafuerte et al., 2013) para σ -estabilizar cada uno de los subsistemas del modelo TS. La σ -estabilización del sistema TS-BPR se garantiza mediante un análisis del lugar geométrico de las raíces de su cuasipolinomio característico. Los resultados teóricos obtenidos son ejemplificados sobre una plataforma experimental no lineal subactuada carro-péndulo. Para determinar el desempeño del controlador propuesto aquí, se realiza una comparación con un clásico control borroso PD empleando la compensación paralela distribuida. A diferencia de los resultados propuestos en (Villafuerte et al., 2013), en el presente artículo se presenta una extensión y aplicación de la ley de control borrosa PR a sistemas no lineales subactuados empleando la metodología TS.

Este escrito está organizado como sigue. La descripción del sistema y los resultados preliminares se presentan en la Sección 2. En la Sección 3 se postulan los resultados principales referentes al diseño y la sintonización del controlador BPR, continuando así en la Sección 4 con la ejemplificación de los resultados propuestos en la sección anterior. Finalmente, en la Sección 5 se presentan algunas conclusiones y comentarios.

2. Resultados Preliminares

En esta sección se recuerdan algunos resultados teóricos sobre sistemas TS y sistemas con retardos.

2.1. Sistemas Borrosos Takagi-Sugeno

Considere un sistema con dinámica de una entrada una salida de n -ésimo orden, $n \geq 2$, de la forma siguiente

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \\ y(t) = g(x(t), u(t)), \end{cases} \quad (1)$$

donde, $x(t) = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $u(t) \in \mathbb{R}$ es la entrada de control, $y(t) \in \mathbb{R}$ es la salida del sistema, $f(x) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $g(x) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas.

Empleando la metodología propuesta por Takagi y Sugeno se obtiene un modelo borroso del sistema (1). El modelo TS se describe a través de reglas del tipo Si-Entonces, las cuales representan las relaciones locales lineales entrada-salida de un sistema no lineal. La característica principal de los modelos TS es expresar las dinámicas locales de cada implicación borrosa (regla) por un modelo lineal. De esta manera el modelo TS se obtiene mediante la mezcla de sus modelos lineales (Tanaka y Wang, 2001). Así, considere la i -ésima regla del modelo borroso de la forma siguiente

Regla modelo i:

$$\begin{array}{l} \text{SI } z_1(t) \text{ está en } M_{i1} \text{ y } \dots, \text{ y } z_p(t) \text{ está en } M_{ip}, \\ \text{ENTONCES } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \\ y(t) = C_i x(t). \end{cases} \end{array}$$

Aquí, M_{ij} , $i = 1, 2, \dots, r$, $j = 1, 2, \dots, p$ es el conjunto borroso y r es el número de reglas; $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entrada, $y(t) \in \mathbb{R}^q$ es el vector de salida, $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C_i \in \mathbb{R}^{q \times n}$; $z_1(t), \dots, z_p(t) \in \mathbb{R}$ son variables premisas conocidas, que pueden estar en funciones de las variables de estado, perturbaciones externas, y/o del tiempo. Por tanto, dado un par $(x(t), u(t))$, el sistema borroso correspondiente al sistema no lineal (1) se infiere como

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\}, \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C_i x(t), \end{cases} \quad (2)$$

donde $z(t) = [z_1(t) \dots z_p(t)]^T$, $h_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))}$ y $w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p M_{ij}(z_j(t))$. El término $M_{ij}(z_j(t))$ es el grado de pertenencia de $z_j(t)$ en el conjunto difuso M_{ij} . Dado que $\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) > 0$, $w_i(z(t)) \geq 0$, tenemos $\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1$, $h_i(z(t)) \geq 0$.

En el marco del diseño de controladores para sistemas TS uno de los procesos más conocidos es la compensación paralela distribuida (PDC, parallel distributed compensation). Aquí, el control se diseña a partir de las reglas del sistema TS. El controlador diseñado comparte los mismos conjuntos borrosos de las premisas (Tanaka y Wang, 2001). Así, las reglas que derivan el controlador mediante PDC son:

Regla Control i:

$$\begin{array}{l} \text{SI } z_1(t) \text{ está en } M_{i1} \text{ y } \dots \text{ y } z_p(t) \text{ está en } M_{ip}, \\ \text{ENTONCES } u(t) = -F_i x(t) \end{array}$$

con $F_i^T = [f_{i1}, \dots, f_{in}]^T \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \dots, r$. Las reglas anteriores infieren un controlador no lineal de la forma

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) F_i x(t). \quad (3)$$

El enfoque PDC da un procedimiento simple y natural para determinar las ganancias de realimentación local F_i . Estas ganancias y la estabilidad se determinan con el resultado siguiente.

Teorema 2.1. (Tanaka y Wang, 2001) *El equilibrio de un sistema TS (2) en lazo cerrado con la ley de control (3) es globalmente estable asintóticamente, si existe una matriz común definida positiva P tal que*

$$\begin{aligned} G_{ii}^T P + P G_{ii} &< 0, \\ \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P + P \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) &\leq 0, \\ i < j \text{ s.t. } h_i \cap h_j &\neq \emptyset, \end{aligned}$$

donde $G_{ij} = A_i - B_i F_j$.

2.2. Sistemas con retardos

Considere un sistema lineal invariante en el tiempo con retardos de la forma

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau), \\ x(\theta) = \psi(\theta); \quad \theta \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (4)$$

donde $A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices constantes, $\tau \in \mathbb{R}^+$ es un retardo y $\psi \in \mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ es la condición inicial del sistema (4). Aquí, $\mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ es el espacio de Banach de las funciones reales y continuas definidas en el intervalo $[-\tau, 0]$ con norma

$$\|\psi\|_\tau := \max_{\theta \in [-\tau, 0]} \|\psi(\theta)\|,$$

donde $\|\cdot\|$ denota la norma en el espacio Euclidiano \mathbb{R}^n . Además, se considera que para cada condición inicial $\psi \in \mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ y $t \geq 0$, existe una única solución o trayectoria $x(t; \psi)$ del sistema (4) (Hale y Verduyn, 1993). Como extensión natural de la condición inicial, el segmento $x_t(\psi) := \{x(t + \theta; \psi) \mid \theta \in [-\tau, 0]\}$, $t \geq 0$, es llamado estado del sistema (4). En lo subsecuente y cuando no cause ambigüedad, se escribirá $x(t)$ y x_t en lugar de $x(t; \psi)$ y $x_t(\psi)$.

Definición 2.1. (Gu et al. (2003)) Sea σ una constante positiva dada. El sistema (4) es σ -estable si todas las raíces de su cuasipolinomio característico tienen parte real menor o igual a $-\sigma$, en otras palabras,

$$\alpha_0 \leq -\sigma, \quad \sigma \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\},$$

donde $\alpha_0 = \max_{j=1, \dots, \infty} \{ \text{Re}\{s_j\} : p(s_j) = 0; s_j \in \mathbb{C} \}$, $p(s_j) = \det(sI_n - A_0 - A_1 e^{-s\tau})$ es el cuasipolinomio característico de (4), $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz identidad.

2.3. Sintonización de un controlador PR

Típicamente se cree que los retardos sólo causan inestabilidad o un mal desempeño en los sistemas; sin embargo, existen varios resultados que contradicen esta afirmación. A continuación se postulan algunos de estos criterios, los cuales emplean los retardos para coadyuvar a estabilizar un sistema.

Considere un sistema SISO de segundo orden de la forma

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \nu^2 & 2\delta\nu \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = x_1, \end{cases} \quad (5)$$

donde, $x(t) = [x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2$ es el vector de estado, $u(t) \in \mathbb{R}$ es la entrada de control, $y(t) \in \mathbb{R}$ es la salida del sistema, $\nu > 0$ es el factor de amortiguamiento y $b > 0$ es la ganancia de entrada. Además, considere la ley de control PR dada por

$$u(t) = -k_p x_1(t) + k_r x_1(t - \tau), \quad (6)$$

donde $k_p, k_r \in \mathbb{R}$ y $\tau > 0$ son la ganancia proporcional, la ganancia retardada y el retardo, respectivamente.

En (Villafuerte et al., 2013) se propone un método geométrico y un método analítico para sintonizar una ley de control PR de la forma (6) para estabilizar un sistema del tipo (5). El método geométrico emplea D-particiones (Neimark (1949)), el cual consiste en subdividir el espacio paramétrico de un cuasipolinomio característico en regiones, las cuales se caracterizan por su grado de inestabilidad. Un caso especial, es subdividir las regiones en regiones σ -estables o inestables.

Proposición 2.2. (Villafuerte et al., 2013) Sean $k_p > 0$ y $\sigma > 0$ dados. El espacio paramétrico del cuasipolinomio característico del sistema (5-6), dado por

$$p(s, k_p, k_r, h) = s^2 + 2\delta\nu s + \nu^2 + bk_p - bk_r e^{-hs}, \quad (7)$$

queda subdividido por las ecuaciones paramétricas siguientes

$$h(\omega) = \frac{1}{\omega} \cot^{-1} \left(\frac{-\omega^2 + (\sigma - \delta\nu)^2 + \nu^2(1 - \delta^2) + bk_p}{2(\sigma - \delta\nu)\omega} \right) + n \frac{\pi}{\omega}, n = 0, 1, \dots, \omega \neq 0, \quad (8)$$

$$k_r(\omega, h) = \frac{2\omega(\sigma - \delta\nu)}{be^{\sigma h} \sin(h\omega)}. \quad (9)$$

Más aún, el valor de σ determina las regiones σ -estables del sistema (5-6).

El método analítico establece ecuaciones algebraicas simples para sintonizar la ley de control (6) y σ -estabilizar al sistema (5).

Proposición 2.3. Sea $\sigma > \delta\nu$ un decaimiento exponencial dado, entonces la ley de control (6) σ -estabiliza al sistema (5), con tres raíces reales dominantes sobre $-\sigma$; al emplear las ganancias $(\bar{k}_p, \bar{k}_r, \bar{h})$ dadas por

$$\bar{k}_p = [(\sigma - \delta\nu)^2 - \nu^2(1 - \delta^2)]/b, \quad (10)$$

$$\bar{h} = 1/[\sigma - \delta\nu], \quad (11)$$

$$\bar{k}_r = [2(\sigma - \delta\nu)^2]/be^{\sigma\bar{h}}. \quad (12)$$

Aunque, el empleo de una ley de control PR puede ser una sugerente opción para manipular un sistema, la metodología anterior sólo puede aplicarse a sistemas lineales de segundo orden. Sin embargo, las técnicas propuestas por Takagi-Sugeno permiten extender su implementación a una clase de sistemas no lineales, ampliando así, el campo de aplicación del controlador PR a sistemas no lineales de segundo orden.

3. Diseño y sintonización de un controlador BPR

En esta sección se propone el diseño y la sintonización de una ley de control BPR para estabilizar un sistema no lineal.

3.1. Diseño de un controlador BPR

La metodología clásica para el diseño de controladores borrosos se esquematiza a continuación

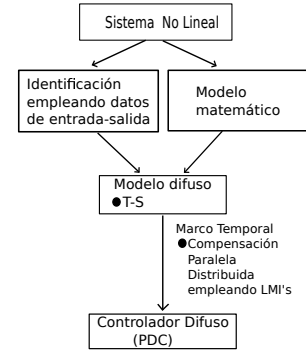


Figura 1: Diseño de un controlador borroso PDC.

A diferencia de la metodología clásica, en la presente propuesta se sugiere reemplazar la última etapa del diseño como sigue:

1. Trabajar en el marco frecuencial en lugar del marco temporal, así la estabilidad del sistema quedará determinada por la ubicación de las raíces de sus cuasipolinomios característicos y no por la factibilidad de LMI's que suelen ser conservativas.
2. Reemplazar la estructura clásica de la ley de control por una que incluya la acción retardada y así evitar el empleo de la acción derivativa.

A continuación se formaliza lo dicho anteriormente y se parte de la obtención de un modelo TS de un sistema no lineal.

Considere un sistema TS del tipo (2) y para la construcción del controlador BPR el razonamiento siguiente,

Regla Control j:

$$\begin{aligned} \text{SI } z_1(t) \text{ está en } M_{j1} \text{ y } \dots \text{ y } z_p(t) \text{ está en } M_{jp}, \\ \text{ENTONCES } u(t) = -K_{p_j} x(t) + K_{r_j} x(t - \tau_j). \end{aligned}$$

Así, la ley de control BPR se infiere como

$$u(t) = \sum_{j=1}^r h_j(z(t)) \{-K_{p_j} x(t) + K_{r_j} x(t - \tau_j)\}, \quad (13)$$

donde $K_{p_j}^T = [k_{p_j}, 0, \dots, 0]^T \in \mathbb{R}^n$ son las ganancias proporcionales, $K_{r_j}^T = [k_{r_j}, 0, \dots, 0]^T \in \mathbb{R}^n$ son las ganancias retardadas y $\tau_j \in \mathbb{R}^+$ son los retardos, $j = 1, \dots, r$. Note que el sistema (2) en lazo cerrado con la ley de control (13) está descrito por

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \{G_{ij} x(t) + R_{ij} x(t - \tau_j)\}, \quad (14)$$

donde $G_{ij} := A_i - B_i K_{p_j}$, $R_{ij} := B_i K_{r_j}$, $i, j = 1, \dots, r$. Observe que el diseño de la ley de control (13) sólo requiere de la salida y la salida retardada del sistema, por lo que a diferencia de una ley de control clásica, la acción derivativa no es requerida para su implementación. Sin embargo, ahora la pregunta es ¿cuáles son los parámetros k_{p_j} , k_{r_j} y τ_j , $j = 1, \dots, r$; bajo los cuales el sistema en lazo cerrado (14) es σ -estable? En la sección siguiente, se presenta un método para sintonizar las ganancias del controlador (13) y así responder la cuestión anterior. Para garantizar la σ -estabilidad del sistema (14), se realiza un análisis del lugar geométrico de las raíces dominantes de su correspondiente cuasipolinomio característico:

$$p(s) = \det \left\{ sI_n - G_z - \sum_{j=1}^r R_z^j e^{-s\tau_j} \right\}, \quad (15)$$

donde $G_z := \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) G_{ij}$, $R_z^j := h_j B_z K_{r_j}$ y $B_z := \sum_{i=1}^r h_i B_i$.

3.2. Sintonización del controlador BPR

Un método para sintonizar una ley de control BPR para estabilizar sistemas no lineales de segundo orden es el siguiente,

1. Obtener un modelo TS de segundo orden a partir del sistema no lineal a controlar, ver ecuación (2).
2. Proponer una ley de control BPR para el sistema TS obtenido en el paso 1, ver ecuación (13).
3. Deducir el lazo cerrado entre el sistema TS obtenido en el paso 1 y la ley de control BPR propuesta en el paso 2, ver ecuación (14).
4. Graficar las regiones de σ -estabilidad Ω_i de cada subsistema de la inferencia (14), cuando $i = 1, 2, \dots, r$ y $j = i$; empleando la Proposición 2.2.
5. Determinar la intersección Ω de todas las regiones de σ -estabilidad Ω_i obtenidas en el paso 4, es decir, $\Omega = \bigcap_{i=1}^r \Omega_i$.
6. Seleccionar ganancias $(\tau_j, k_{p_j}, k_{r_j}) \in \Omega$ para sintonizar cada controlador BPR de cada subsistema de la inferencia (14), cuando $i = 1, 2, \dots, r$ y $j = i$.
7. Calcular el lugar geométrico de las raíces dominantes del cuasipolinomio característico (15), empleando las ganancias de la ley BPR sintonizadas en el punto 6, para verificar la estabilización del sistema en lazo cerrado (14).
8. Elegir funciones de pertenencia adecuadas a cada regla de la fusificación. Aunque la estabilidad del sistema (14) no queda determinada por la elección de las funciones de pertenencia debido a que no alteran la ubicación de las raíces dominantes del cuasipolinomio característico (15), éstas funciones sí influyen en el correcto desempeño de la respuesta del sistema (14).

Para clarificar mejor el método de sintonización propuesto anteriormente, sin pérdida de generalidad se ejemplifica el proceso sobre un sistema particular.

Considere el modelo matemático del sistema no lineal carro-péndulo (Tanaka y Wang, 2001), ilustrado en la Figura 2.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{g \operatorname{sen}(x_1(t)) - a m x_2^2(t) \operatorname{sen}(2x_1(t))/2 - a \cos(x_1(t)) u(t)}{4l/3 - a m \cos^2(x_1(t))}, \end{aligned} \quad (16)$$

donde $x_1(t)$ es la posición angular del péndulo respecto al eje vertical, $x_2(t)$ la velocidad angular, m la masa del péndulo, M es la masa del carro, g la constante de gravedad, $2l$ la longitud del péndulo, u la potencia eléctrica aplicada al carro y $a = 1/(m+M)$. Para efectos de simulación y experimentación considere que $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, $m = 0.23 \text{ kg}$, $M = 0.52 \text{ kg}$ y $l = 0.32 \text{ m}$.

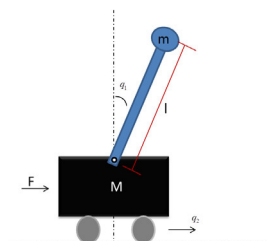


Figura 2: Carro-péndulo.

Observe que el sistema (16) se puede aproximar por un modelo borroso de dos reglas que es construido mediante aproximación local. Estas dos reglas se emplean para hacer la fusificación del carro-péndulo.

Regla 1: Si $x_1(t)$ está cerca de 0, entonces

$$\dot{x}(t) = A_1 x(t) + B_1 u(t), \quad (17)$$

Regla 2: Si $x_1(t)$ está cerca de $\pm\pi/4$, entonces

$$\dot{x}(t) = A_2 x(t) + B_2 u(t). \quad (18)$$

La segunda regla se estructura cerca de $\pm\pi/4$, debido a las restricciones físicas de la plataforma experimental. Así, el modelo TS de segundo orden es

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(x_1) \{A_i x(t) + B_i u(t)\}, \quad (19)$$

donde $h_i \in [0, 1]$, $x^T(t) = (x_1(t), x_2(t)) \in \mathbb{R}^2$, $u(t) \in \mathbb{R}$, $\beta = \cos(\pi/4) = \sin(\pi/4)$; y

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{4l/3 - a m l} & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a}{4l/3 - a m l} \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\beta[8g(4l/3 - a m l \beta^2) - 1]}{\pi(4l/3 - a m l \beta^2)} & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a \beta}{4l/3 - a m l \beta^2} \end{bmatrix}.$$

Las funciones de pertenencia empleadas son del tipo triangular como se muestran en la Figura 3.

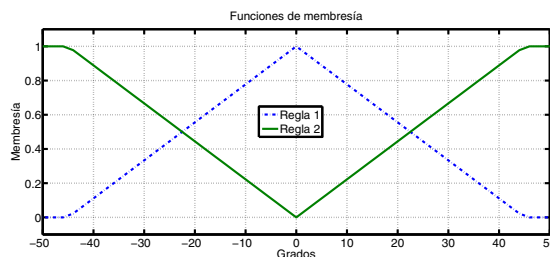


Figura 3: Funciones de pertenencia.

Ahora, considera la ley de control BPR siguiente

$$u(t) = \sum_{j=1}^2 h_j(x) \{-K_{p_j}x(t) + K_{r_j}x(t - \tau_j)\}, \quad (20)$$

donde $K_{p_j}^T = [k_{p_j}, 0]^T$, $K_{r_j} = [k_{r_j}, 0]^T \in \mathbb{R}^2$ y $\tau_j \in \mathbb{R}^+$, $j = 1, 2$. Así, el sistema (19) en lazo cerrado con la ley de control (20) se infiere como

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 h_i(x_1)h_j(x_1) \{G_{ij}x(t) + R_{ij}x(t - \tau_j)\}. \quad (21)$$

En seguida, los resultados presentados en la Sección 2.3 son empleados para graficar las regiones Ω_i , $i = 1, 2$, de cada subsistema de la inferencia (21).

Primero, cuando $i = j = 1$ el sistema (21) se reduce a

$$\dot{x}(t) = G_{11}x(t) + R_{11}x(t - \tau_1). \quad (22)$$

Aplicando la Proposición 2.2 se obtienen sus correspondientes regiones Ω_1 de σ -estabilidad, ver Figura 4. Observe que la máxima σ -estabilidad alcanzable para el subsistema (22) es $\sigma_1^* = 77.832$ empleando las ganancias $(\tau_1^*, k_{p_1}^*, k_{r_1}^*) = (0.012, -1500, -1098.230) \in \Omega_1$. Estas ganancias también se pueden obtener de manera sencilla empleando la Proposición 2.3. Segundo, cuando $i = j = 2$, se tiene que (21) es

$$\dot{x}(t) = G_{22}x(t) + R_{22}x(t - \tau_2). \quad (23)$$

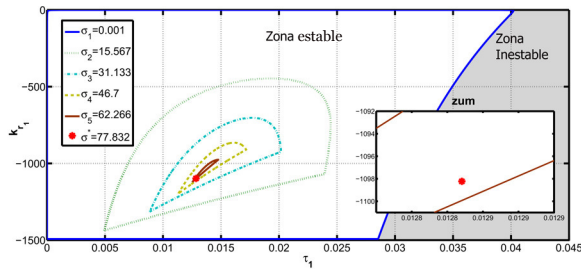


Figura 4: Regiones σ -estables Ω_1 del subsistema (22).

En la Figura 5 se muestran sus correspondientes regiones Ω_2 de σ -estabilidad. La máxima σ -estabilidad alcanzable para el subsistema (23) es $\sigma_2^* = 61.059$ empleando las ganancias $(\tau_2^*, k_{p_2}^*, k_{r_2}^*) = (0.016, -1500, -1098.614) \in \Omega_2$.

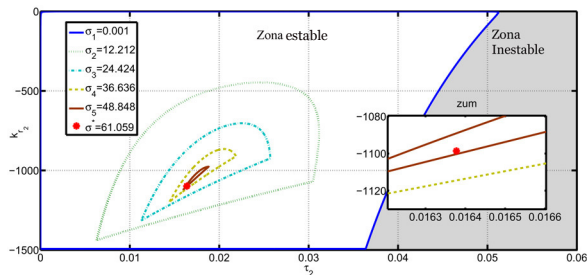


Figura 5: Regiones σ -estables Ω_2 del subsistema (23).

En las Figuras 6 y 7, la máxima σ -estabilidad alcanzable de cada subsistema (22) y (23) es ratificada, obteniendo el lugar geométrico de algunas de las raíces más representativas de sus correspondientes cuasipolinomios.

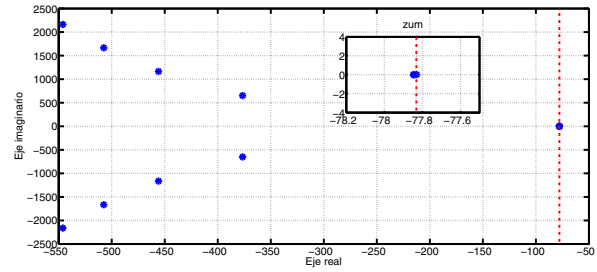


Figura 6: Lugar geométrico de las raíces del subsistema (22) empleando $(\tau_1^*, k_{p_1}^*, k_{r_1}^*)$.

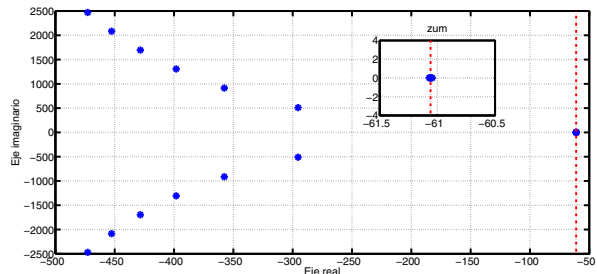


Figura 7: Lugar geométrico de las raíces del subsistema (23) empleando $(\tau_2^*, k_{p_2}^*, k_{r_2}^*)$.

Para garantizar σ -estabilidad del sistema (21) es razonable sintonizar la ley de control (20) con ganancias $(\tau, k_p, k_r) \in \Omega$, donde $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$, ver Figura 8. En este caso en particular, se eligen las ganancias que determinan mayor σ -estabilidad en los subsistemas (22) y (23).

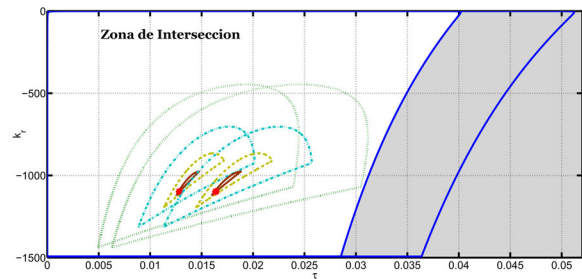


Figura 8: Intersección Ω de las regiones de σ -estabilidad.

Naturalmente, la σ -estabilidad de los subsistemas (22) y (23) no garantiza la estabilidad del sistema (21), por lo que a continuación se presenta un análisis del lugar geométrico de las raíces dominantes de su cuasipolinomio característico.

Considere el cuasipolinomio del sistema (21) siguiente

$$p(s) = \det \{sI_n - G_z - R_z^1 e^{-s\tau_1} - R_z^2 e^{-s\tau_2}\}, \quad (24)$$

donde $G_z = h_1^2(x_1)G_{11} + h_1(x_1)h_2(x_1)G_{12} + h_1(x_1)h_2(x_1)G_{21} + h_2^2(x_1)G_{22}$, $R_z^1 = h_1(x_1)B_z K_{r_1}$, $R_z^2 = h_2(x_1)B_z K_{r_2}$, $B_z = h_1(x_1)B_1 + h_2(x_1)B_2$, $h_1(x_1), h_2(x_1) \in [0, 1]$ y $h_1(x_1) + h_2(x_1) = 1$.

Es bien conocido que el sistema (21) es σ -estable si y sólo si, la familia de cuasipolinomios (24) posee raíces dominantes ubicadas del lado izquierdo de la abscisa $-\sigma$ del plano complejo. En la Figura 9 se

presenta el lugar geométrico de las raíces dominantes de la familia de cuasipolinomios (24), cuando $h_1(x_1)$ es variado entre 0 y 1; y $h_2(x_1) = 1 - h_1(x_1)$. Observe que, si $h_1(x_1) = 0$, entonces el cuasipolinomio (24) tiene tres raíces reales dominantes sobre la abscisa $-\sigma = -61.06$, al igual que en la Figura 7. Cuando $h_1(x_1) \in [0, 0.01]$ estas tres raíces se separan, una recorre el eje real hasta llegar a $-\sigma = -50.71$ y las dos restantes se mueven en sentido inverso hasta colocarse sobre la abscisa $-\sigma = -61.06$ con parte imaginaria ± 11.48 . Si $h_1(x_1) \in [0.01, 0.1]$ la raíz real llega a $-\sigma = -42.89$ y las complejas a $-\sigma = -70.37$, con parte imaginaria ± 26.84 . Cuando $h_1(x_1) \approx 0.3$ la raíz real alcanza la frontera derecha de σ -estabilidad con $-\sigma \approx -40$. Cuando $h_1(x_1) \in [0.3, 0.9]$ la raíz real gana σ -estabilidad, hasta llegar a $-\sigma = -52.45$; mientras que las raíces complejas se colocan sobre $-\sigma = -84.43$, con parte imaginaria ± 32.62 . Cuando $h_1(x_1) \in [0.9, 1]$ las tres raíces siguen su recorrido natural hasta colapsar en $-\sigma = -77.83$, al igual que en la Figura (6).

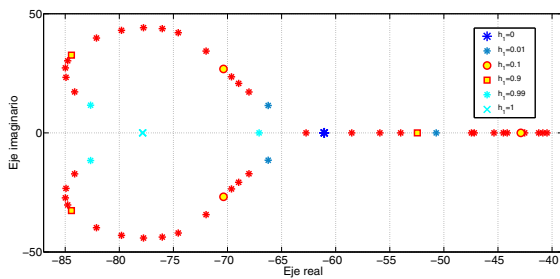


Figura 9: Lugar de las raíces del cuasipolinomio (24).

Así, empleando la propiedad de continuidad del espectro de un cuasipolinomio (Michiels y Niculescu, 2007), se garantiza que la familia de cuasipolinomios (24) es σ -estable. Por lo tanto, la ley de control BPR (20) σ -estabiliza al sistema subactuado carro-péndulo (19) con $\sigma = 40$. Empleando los parámetros $\tau_1 = 0.012$, $k_{p1} = -1500$, $k_{r1} = -1098.230$, $\tau_2 = 0.016$, $k_{p2} = -1500$, y $k_{r2} = -1098.614$.

4. Implementación de resultados

A continuación se reporta la implementación de los resultados obtenidos en la sección anterior para estabilizar un sistema carro-péndulo.

4.1. Resultados en simulación

A continuación, el desempeño del controlador BPR y una comparación con el clásico PDC se presentan. La simulación se realizó empleando el software matemático Matlab®.

Considere el sistema no lineal carro-péndulo (16), su representación TS (19), la ley de control BPR (20) y una PDC ordinaria de la forma

$$u(t) = - \sum_{j=1}^2 h_j(z(t)) F_j x(t), \quad (25)$$

donde $F_1 = [-1500, 38.3556]$ y $F_2 = [-1500, 48.9090]$. En la Figura 10 se muestran las respuestas del sistema (19) en lazo cerrado con las leyes de control (20) y (25). Observe que la convergencia de la respuesta con el controlador BPR es más rápida y suave. Ahora, para constatar el diseño de los controladores, en la Figura 11 se presenta la respuesta del sistema no lineal (16) en lazo cerrado con las leyes de control (20) y (25).

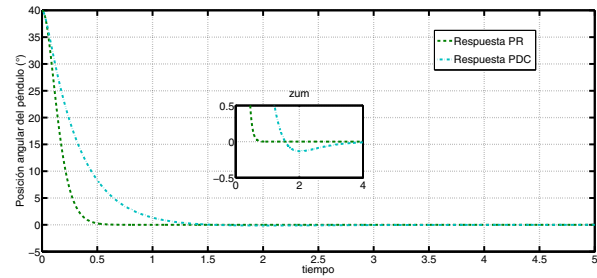


Figura 10: Respuesta del sistema (19) en lazo cerrado con las leyes de control (20) y (25).

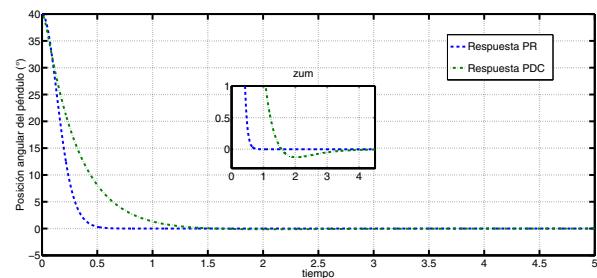


Figura 11: Respuesta del sistema no lineal (16) en lazo cerrado con las leyes de control (20) y (25).

Las señales de control (20) y (25) aplicadas al sistema no lineal (16) se presentan en la Figura 12. Observe que el controlador (25) tiene mayor sobre impulso: esto significa mayor demanda de energía y mayor saturación de los actuadores, lo que resulta dañino para el desempeño en tiempo real.

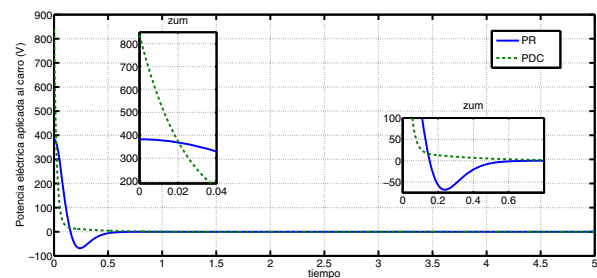


Figura 12: Señales de control (20) y (25) aplicadas al sistema no lineal (16).

4.2. Resultados experimentales

Después de evidenciar la efectividad del diseño del control aquí propuesto en un entorno de simulación, es razonable implementar éste sobre una plataforma real.

Considere un prototipo didáctico no lineal subactuado carro-péndulo *IP01*, diseñado por *QUANSER*® y presentado en la Figura 13. La implementación de los controladores se realizó mediante el módulo de *Real-Time Windows Target* de Matlab®. Los parámetros del sistema real *IP01* y las ganancias de los controladores son los mismos que los que se implementaron en las simulaciones, ver Sección 3.2. Para la aplicación del controlador (25) se requirió el diseño de un filtro pasa altas para estimar la razón de cambio de la posición angular del péndulo.

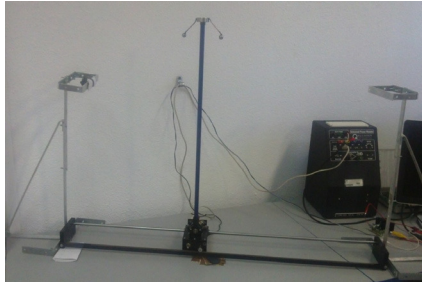


Figura 13: Sistema real no lineal subactuado IP01.

En la Figura 14 se muestran las respuestas del sistema real IP01 al implementar los controladores (20) y (25), respectivamente.

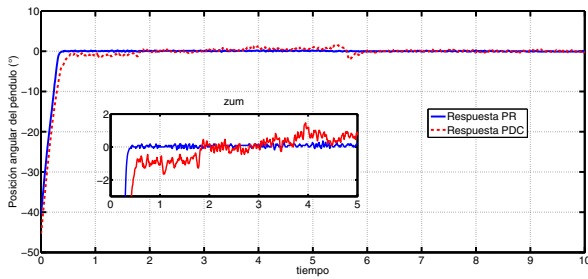


Figura 14: Respuesta del sistema real IP01 en lazo cerrado con las leyes de control (20) y (25).

Observe que la respuesta del sistema real IP01 se estabiliza más rápido empleando la ley de control BPR (20). Para tener una idea cuantitativa de la efectividad de estabilización de los controladores, en la Tabla 1 se presentan sus errores cuadráticos medio (ECM).

Tabla 1: ECM de la respuesta del sistema real IP01.

	ECM
Respuesta PR	0.1300
Respuesta PDC	0.1563

En la Figura 15 se visualiza la demanda de energía requerida por los controladores (20) y (25) para estabilizar el sistema real IP01, las cuales corresponden al voltaje que la tarjeta de adquisición PCI-6071 envía al actuador a través de su canal de salida analógico AN00.

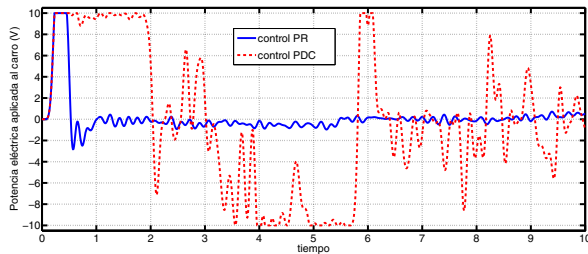


Figura 15: Señales de control PR (20) y PDC (25).

Claramente la ley de control PR (20) demanda menor consumo de energía respecto a la ley de control borrosa clásica (25), además las va-

riaciones de la demanda de energía del controlador BPR son menores; evitando así desgaste en el actuador del sistema real IP01.

4.2.1. Seguimiento de trayectoria

Con el fin de mostrar un referente más del desempeño de la ley de control BPR, en la Figura 16 se observa la respuesta del sistema real IP01 en tareas de seguimiento.

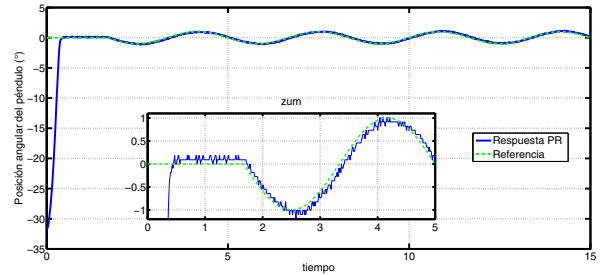


Figura 16: Seguimiento de trayectoria del péndulo.

Cabe mencionar que el seguimiento de trayectoria sólo se aplica a la posición de péndulo y no sobre la posición del carro, ya que la metodología actual propuesta para la sintonización de la ley BPR sólo se puede emplear en sistemas de segundo orden. Sin embargo, ya se está analizando y desarrollando la metodología para implementar tareas de seguimiento sobre ambas posiciones a la vez. También es preciso mencionar que sólo se muestra el desempeño del BPR, dado que el enfoque PDC muestra resultados poco atractivos para esta tarea. En la Figura 17 se muestra la ley de control suministrada al sistema real IP01 para poder realizar el seguimiento de trayectoria anterior.

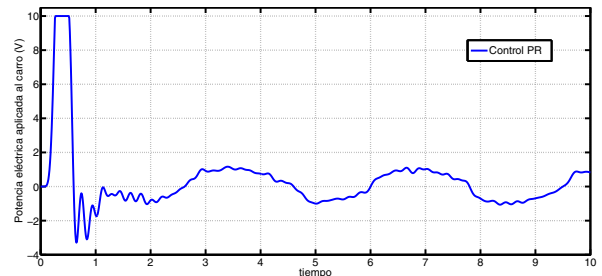


Figura 17: Señal de control aplicada al sistema real IP01 para el seguimiento de trayectoria.

5. Conclusiones

El diseño y la sintonización de una ley de control BPR para estabilizar una clase de sistemas no lineales se proponen en este trabajo. La estabilidad del sistema no lineal se garantiza mediante la σ -estabilización de su modelo borroso del tipo TS en lazo cerrado con la ley de control BPR. La σ -estabilización del sistema TS-BPR se garantiza mediante un análisis del lugar geométrico de las raíces de su cuasipolinomio característico. El diseño y la sintonización de la ley BPR se ilustran sobre una plataforma experimental no lineal subactuada carro-péndulo. Además, el desempeño del control propuesto aquí se comparan con una clásica PDC.

Aquí, la estabilización del sistema no lineal subactuado carro-péndulo se mejora usando una ley de control BPR en comparación con una

clásica PDC. Además, la ley de control BPR evita emplear instrumentos y/o técnicas de aproximación requeridos para implementar la clásica acción derivativa; tiene menor saturación y demanda de energía lo que se traduce en un menor desgaste de los actuadores. Así, un controlador BPR ofrece una alternativa sencilla y eficiente para controlar ciertos procesos.

English Summary

Design and tuning of a fuzzy proportional retarded controller: frequency approach

Abstract

The time delays are usually an undesirable phenomenon in the control processes, because these can induce instability or a poor performance in the system. However, the time delays have the property of assisting in stabilizing. This article benefiting from this property to propose the design and tuning of a fuzzy proportional retarded controller (BPR) to stabilize a class of nonlinear systems. In this frame, the stabilization of a nonlinear system is guaranteed through the σ -stability of its Takagi-Sugeno (TS) fuzzy model in close-loop with BPR controller. The BPR controller design is based on inclusion a retarded action in the conventional structure. While the tuning of the BPR control law, has been addressed in the frequency approach using D-partition method. The stability of TS-BPR fuzzy system is ensured by analyzing the root locus of its characteristic quasipolynomial. The design and tuning of BPR controller are exemplified on a car-pendulum experimental platform. The performance of BPR is compared with a parallel distributed compensation classic.

Keywords: Control nonlinear systems, fuzzy systems, time delay systems, fuzzy control PR.

Agradecimientos

Los autores agradecen el apoyo otorgado por PROMEP a través del “Apoyo a la incorporación de nuevos PTC”, así como la vinculación con el Cuerpo Académico PROMEP CA-18 “Control No Lineal de Sistemas Dinámicos” del Instituto Tecnológico de Sonora.

Referencias

- Abdallah, C., Dorato, P., Benites-Read, J., Byrne, R., 1993. Delayed positive feedback can stabilize oscillatory systems. En: American Control Conference, 1993, pp. 3106–3107.
- Aracil, J., Gordillo, F., 2005. El péndulo invertido: un desafío para el control no lineal. *RIAI* 2 (2), 8–19.
- Aranda, E., Guinaldo, M., Santos, M., Dormido, S., 2014. Fuzzy logic vs analytic controllers on non-linear system. En: 11th International FLINS Conference on Decision Making and Soft Computing.
- Berghuis, H., Nijmeijer, H., 1993. Global regulation of robots using only position measurements. *Systems & control letters* 21 (4), 289–293.
- Cao, Y.-Y., Frank, P., 2000. Analysis and synthesis of nonlinear time-delay systems via fuzzy control approach. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on* 8 (2), 200–211.
- Chiang, C.-C., 2006. Decentralized robust fuzzy-model-based control of uncertain large-scale systems with input delay. En: Fuzzy Systems, 2006 IEEE International Conference on. pp. 498–505.
- Cooke, K. L., Grossman, Z., 1982. Discrete delay, distributed delay and stability switches. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 86 (2), 592–627.
- Dellnitz, M., Schutze, O., Zheng, Q., 2002. Locating all the zeros of an analytic function in one complex variable. *Computational and Applied Mathematics* 138, 325–333.
- Gu, K., Chen, J., Kharitonov, V., 2003. *Stability of Time-Delay Systems*. Addison-Wesley series in electrical and computer engineering: Control engineering. SPRINGER VERLAG NY.
- Guinaldo, M., Vargas, H., J., S., Sanz, E., Dormido, S., 2010. Web-based control laboratory: The ball and beam system. 9th Portuguese Conference on Automatic Control.
- Hale, J., Verduyn, S., 1993. *Introduction to functional differential equations*. Springer-Verlag, New York.
- Hang, C.-C., Astrom, K., Ho, W. K., 1991. Refinements of the ziegler-nichols tuning formula. *Control Theory and Applications, IEE Proceedings D* 138 (2), 111–118.
- Huang, Y., Kuo, T., Lee, H., 2007. Fuzzy-pd controller design with stability equations for electro-hydraulic servo systems. En: Control, Automation and Systems, 2007. ICCAS '07. International Conference on. pp. 2407–2410.
- Kelly, R., Ortega, R., Ailon, A., Loria, A., 1994. Global regulation of flexible joint robots using approximate differentiation. *Automatic Control, IEEE Transactions on* 39 (6), 1222–1224.
- Leghmi, S., Sheng, L., 2012. Takagi-sugeno fuzzy pd controller for a 3-dof stabilized platform. En: Intelligent Control and Automation (WCICA), 2012 10th World Congress on. pp. 108–112.
- Lin, C.-Y., Hanh, L. D., Chiu, Y.-P., 2009. Catching algorithm for 2d robot manipulator using pd controller. En: ICCAS-SICE, 2009. pp. 46–50.
- Michiels, W., Niculescu, S.-L., 2007. *Stability and stabilization of time-delay systems: An eigenvalue-based approach*. SIAM, Philadelphia.
- Mondié, S., Villafuerte, R., Garrido, R., 2011. Tuning and noise attenuation of a second order system using proportional retarded control. En: 18th IFAC World Congress, Milano, Italy.
- Neimark, J., 1949. D-subdivisions and spaces of quasi-polynomials. *Prikl. Mat. Meh.* 13 (1), 349–380.
- Nicosia, S., Tomei, P., 1994. A tracking controller for flexible joint robots using only link position feedback. En: Decision and Control, 1994., Proceedings of the 33rd IEEE Conference on. pp. 1817–1822.
- Simhachalam, D., Dey, C., Mudi, R., 2012. An auto-tuning pd controller for dc servo position control system. En: Power, Control and Embedded Systems (ICPES), 2012 2nd International Conference on. pp. 1–6.
- Slotine, J. J. E., Li, W., 1991. *Applied Nonlinear Control*. Prentice-Hall, Inc., New Jersey.
- Spong, M. W., 1998. *Underactuated mechanical systems*. Lecture Notes in Control and Information Sciences.
- Suh, I., Bien, Z., 1979. Proportional minus delay controller. *Automatic Control, IEEE Transactions on* 24 (2), 370–372.
- Suh, I.-H., Bien, Z., 1980. Use of time-delay actions in the controller design. *Automatic Control, IEEE Transactions on* 25 (3), 600–603.
- Swisher, G. M., Tenqchen, S., 1988. Design of proportional-minus-delay action feedback controllers for second- and third-order systems. En: American Control Conference, 1988. pp. 254–260.
- Tanaka, K., Wang, H. O., 2001. *Fuzzy Control Systems Design and Analysis*. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Villafuerte, R., Mondie, S., Garrido, R., 2013. Tuning of proportional retarded controllers: Theory and experiments. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on* 21 (3), 983–990.
- Wang, Z., Hu, H., 2008. Calculation of the rightmost characteristic root of retarded time-delay systems via lambert w function. *Journal of Sound and Vibration* 318 (4), 757–767.
- Zhao, Y., Gao, H., 2012. Fuzzy-model-based control of an overhead crane with input delay and actuator saturation. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on* 20 (1), 181–186.
- Zhao, Y., Gao, H., Lam, J., Du, B., 2009. Stability and stabilization of delayed t-s fuzzy systems: A delay partitioning approach. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on* 17 (4), 750–762.
- Zhong, Q. C., Li, H. X., 2002. A delay-type pid controller. 15th Triennial World Congress, Barcelona, Spain.
- Ziegler, J. G., Nichols, N. B., 1942. Optimum settings for automatic controllers. *Transactions of the A. S. M. E.* 230 (1), 135–150.