

## Control del Nivel de Pulpa en un Circuito de Flotación Utilizando una Estrategia de Control Predictivo.

Cristián Troncoso G.<sup>\*</sup>, Alejandro Suárez S.

*Departamento de Electrónica, Universidad Técnica Federico Santa María, Av. España nº 1680, Valparaíso, Chile*

### Resumen

Este trabajo presenta el diseño y resultados de la implementación de una estrategia de control predictivo para el control del nivel de pulpa de un circuito de flotación primario de una minera ubicada en la tercera región de Chile, el cual está compuesto por cinco bancos de flotación. La estrategia considera una representación de estados que modela el nivel de cada banco (utilizando un modelo de múltiples entradas y una salida), el que es obtenido mediante un procedimiento de identificación de sistemas y utiliza un filtro de Kalman como estimador de estados. Para resolver el problema de optimización que calcula la acción de control a aplicar se utiliza un optimizador basado en algoritmos genéticos. Se presentan los resultados de la estrategia de control propuesta mediante datos experimentales. *Copyright © 2017 CEA.*

### Palabras Clave:

Control predictivo basado en modelo, Identificación de sistemas y estimación de parámetros, Filtro de Kalman, Rechazo a perturbaciones, Minería, metalurgia, metales y materiales

### 1. Introducción

La flotación es uno de los procesos de separación de minerales más utilizados dentro de la minería. Este proceso se produce en un conjunto de estanques conectados entre sí, a los cuales ingresa el material y en donde se generan burbujas. Debido a sus propiedades aerofílicas, las cuales son exacerbadas mediante la adición de químicos, el mineral valioso de cobre se adhiere a dichas burbujas subiendo a la superficie y formando espuma rica de mineral valioso, mientras que el resto de material se mantiene en el fondo del estanque. Mediante el ajuste del nivel de la pulpa en cada banco (conjunto de estanques que comparten propiedades como el nivel de pulpa), la espuma que se obtiene se hace rebosar hacia estanques que la envían hacia otras etapas. Es importante controlar adecuadamente el nivel de los bancos para evitar efectos como el rebose de pulpa de material indeseable y para poder controlar la velocidad de rebose de los bancos de manera precisa.

El control del nivel de pulpa en cada banco se realiza manipulando la válvula de salida de éste, en donde generalmente se usan controladores PID (denominados así por sus siglas "Proporcional Integral y Derivativo"). Este tipo de control no entrega un buen desempeño al conectar tres o más bancos en serie

(Hulbert (1995)) ya que el nivel en cada banco depende tanto del flujo de entrada como el de salida, y el control con acción PID no considera el efecto del cambio del flujo de entrada en el nivel de pulpa del banco, lo que genera un comportamiento que empeora el rendimiento del circuito de flotación. Para mejorar el desempeño del circuito, es necesario diseñar una estrategia de control que sea capaz de compensar las perturbaciones causadas por la interacción que hay entre los bancos.

Para compensar las perturbaciones se pueden utilizar distintos esquemas de control, el más conocido corresponde a utilizar un compensador por adelanto (Goodwin et al. (2000)), lo que se puede utilizar en conjunto con controladores PID para generar un controlador por desacoplo, como se presenta en (Stenlund and Medvedev (2002)) al igual que en (Kämpjärvi and Jämsä-Jounela (2003)), la mayor desventaja de este esquema es que el desempeño se degrada a medida que el modelo del sistema es menos preciso, situación que se puede dar debido a las no linealidades, incerteza y las dinámicas no modeladas del proceso. Otra estrategia para controlar el circuito de flotación, compensando las perturbaciones, corresponde a utilizar un controlador LQR (por sus siglas en inglés "Linear Quadratic Regulator"), como presentan Stenlund and Medvedev (2002), pero su dificultad radica en que es difícil de implementar si no se poseen las herramientas adecuadas para resolver la ecuación de Ricatti correspondiente. Una tercera opción corresponde a una estrategia de control predictivo, que provee una solución unificada para

<sup>\*</sup> Autor en correspondencia.

Correos electrónicos: cristian.troncoso@alumnos.usm.cl (Cristián Troncoso G.), alejandro.suarez@usm.cl (Alejandro Suárez S.)

realizar control por retraso y por adelanto de manera intrínseca.

El control predictivo, o MPC (por sus siglas en inglés "*Model Predictive Control*"), es una estrategia de control en donde se utiliza un modelo del sistema para predecir las respuestas futuras de la planta ante una entrada determinada y se resuelve un problema de optimización para encontrar la actuación que minimiza un criterio que considera los objetivos de control. El control predictivo es una estrategia que puede ser utilizada para controlar una gran variedad de procesos, siendo más ventajosa para sistemas multivariados, con dinámicas lentas y retardos grandes. Esta estrategia tiene como desventaja que requiere de una alta capacidad de cómputos para calcular la actuación a aplicar, debido a que hay que resolver un problema de optimización en cada instante de muestreo de la estrategia de control.

Este trabajo se realiza dentro del circuito de flotación primario de una minera de la tercera región de Chile, que posee cinco bancos conectados en serie. Este sistema posee dinámicas lentas, que además contienen retardos y en donde es necesario compensar perturbaciones, por lo que una estrategia de control predictivo resulta una forma atractiva para controlar el proceso.

El trabajo consiste en diseñar e implementar una estrategia de control predictivo que permita mantener estable el nivel de pulpa en los bancos, mediante la correcta compensación de las perturbaciones (medibles) del sistema. Adicionalmente la estrategia implementada no debe perder el control ante los cambios de flujo a la entrada del circuito. Se posee como restricción que la estrategia de control predictivo debe desarrollarse con las herramientas disponibles en la minera. Para resolver problemas de optimización se cuenta con un sistema experto que posee un módulo de optimización basado en algoritmos genéticos, por lo que hay que usar esta técnica para resolver el problema de optimización formulado en la estrategia de control predictivo, lo que lleva a la estrategia de control predictivo implementada.

El desempeño de la estrategia de control predictivo es comparada con el control utilizado hasta el momento en el circuito de flotación, que consiste en un conjunto de controladores PID. Este análisis se realiza bajo las condiciones de operación normales del proceso.

La estrategia se implementa utilizando un sistema experto comercial y el modelo se encuentra mediante un procedimiento de identificación, utilizando la herramienta de identificación de sistemas de MATLAB.

El trabajo se organiza de la siguiente manera: en la sección 2 se presenta un modelo que describe el comportamiento del sistema, en las secciones 3, 4 y 5 se presentan los elementos utilizados en el diseño e implementación de la estrategia de control predictivo y el trabajo experimental relacionado, en la sección 6 se describen los elementos del control predictivo y el trabajo experimental relacionado, en la sección 7 se describen los resultados de la implementación de la estrategia de control predictivo. El trabajo termina con las conclusiones.

### 1.1. Soluciones abordadas por otros autores

Dentro de la minería se han desarrollado muchos trabajos que buscan encontrar un modelo matemático de un proceso, por ejemplo el trabajo realizado por Suárez and Gómez (2011),

modelo que luego puede utilizarse para predecir el comportamiento futuro del proceso y en conjunto con una herramienta de optimización adecuada, generar una estrategia de control predictivo.

Existen algunos trabajos en donde se han presentado distintas formas de controlar el nivel de pulpa en de los bancos de flotación. En el trabajo presentado por Stenlund and Medvedev (2002) se realizan comparaciones entre 4 estrategias multivariadas con el fin de realizar control de nivel de pulpa en un circuito de flotación, entre ellas un controlador que considera un elemento de pre-alimentación para corregir los efectos en el cambio de flujo a la entrada del primer banco, un controlador por desacoplo, y otras estrategias que buscan mejorar el rendimiento del control.

Kämpjärvi and Jämsä-Jounela (2003) proponen el uso de un controlador por desacoplo y un controlador LQR para controlar el nivel de pulpa en un circuito de flotación, en ambos casos el control se complementa con un controlador por pre-alimentación para compensar los cambios de flujo a la entrada del circuito.

Putz and Cipriano (2015) presentan los resultados de una estrategia de control predictivo que utiliza un modelo híbrido para controlar el nivel de los bancos y la ley de colas del proceso de flotación, el que se demuestra efectivo de acuerdo a simulaciones.

Cabe destacar que en los tres trabajos anteriores los resultados se validan mediante simulaciones, y no sobre un proceso real, por lo que no considera los problemas que pueden aparecer debido a la instrumentación, a las perturbaciones que pueden aparecer en un circuito real, a la incerteza del modelo, ni a las dinámicas no modeladas del sistema, siendo un problema bastante acotado en ese aspecto.

Existen más trabajos que presentan estrategias de control predictivo para el control de circuitos de flotación, por ejemplo (Pérez-Correa et al. (1998), Rojas and Cipriano (2011) y Desbiens et al. (1998)), pero la mayoría de estas estrategias asumen que el problema de variabilidad en el nivel ya está solucionado, y lo que se desea es controlar la ley de colas, la ley de concentrado o ambas.

Martínez et al. (1998) presentan teoría y ejemplos de la implementación de una estrategia de control predictivo que utiliza un modelo CARIMA (por sus siglas en inglés "*Controlled Auto-Regressive Integrating Moving Average*") en conjunto con un optimizador basado en algoritmos genéticos. Esta estrategia de control predictivo es similar a la propuesta en este trabajo ya que se utiliza el mismo algoritmo de optimización con el fin de encontrar la ley de control, en este trabajo se analiza la respuesta de la estrategia de control en una planta SISO, en este trabajo se analiza un sistema multivariable. Adicionalmente esta estrategia no considera ninguna forma de compensar el efecto del ruido de medición, al contrario de la estrategia presentada en este trabajo..

Este trabajo en demuestra que se puede utilizar un modelo lineal, un filtro de Kalman y una herramienta de optimización basada en algoritmos genéticos para implementar una estrategia de control predictivo sujeto a restricciones, de la que se desconoce su uso en otras aplicaciones. Además se presenta la im-

plementación del trabajo sobre un sistema real y se describe la forma en que se lidia con los problemas que aparecen en el proceso debido a las fluctuantes condiciones de operación.

## 2. Modelo del sistema

Aunque en este trabajo el modelo del nivel de los bancos en el circuito de flotación se encuentra mediante un procedimiento de identificación de sistemas, en esta sección se presenta un modelo para el nivel de pulpa en el circuito de flotación primario, ya que luego este modelo es utilizado para reconocer las interacciones que ocurren entre los bancos y tener una idea de la estructura del modelo durante el proceso de identificación.

Para efectos de control el circuito de flotación trabajado se puede considerar como un sistema de estanques acoplados, en donde el flujo de salida de cada estanque se manipula abriendo o cerrando una válvula como se ilustra en la figura 1.

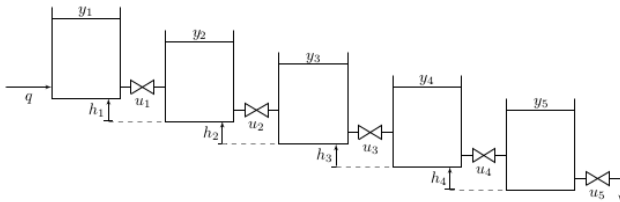


Figura 1: Circuito de flotación desde el punto de vista de control.

En la figura 1 se denomina  $y_1, \dots, y_5$  al nivel de pulpa de cada banco, y  $u_1, \dots, u_5$  corresponden a las actuaciones (porcentaje de apertura) de cada banco, además del flujo de entrada del primer banco, es denominado como  $q$ .

El circuito se puede modelar como un conjunto de estanques acoplados, con lo cual se obtienen el siguiente conjunto de ecuaciones no lineales:

$$\dot{y}_1 = \frac{1}{S} (q_i - \alpha_1 \cdot u_1 \sqrt{y_1 - y_2 + h_1}) \quad (1a)$$

$$\dot{y}_2 = \frac{1}{S} (\alpha_1 \cdot u_1 \sqrt{y_1 - y_2 + h_1} - \alpha_2 \cdot u_2 \sqrt{y_2 - y_3 + h_2}) \quad (1b)$$

$$\dot{y}_3 = \frac{1}{S} (\alpha_2 \cdot u_2 \sqrt{y_2 - y_3 + h_2} - \alpha_3 \cdot u_3 \sqrt{y_3 - y_4 + h_3}) \quad (1c)$$

$$\dot{y}_4 = \frac{1}{S} (\alpha_3 \cdot u_3 \sqrt{y_3 - y_4 + h_3} - \alpha_4 \cdot u_4 \sqrt{y_4 - y_5 + h_4}) \quad (1d)$$

$$\dot{y}_5 = \frac{1}{S} (\alpha_4 \cdot u_4 \sqrt{y_4 - y_5 + h_4} - \alpha_5 \cdot u_5 \sqrt{y_5}) \quad (1e)$$

Donde  $S$  corresponde al área transversal de los bancos,  $\alpha_1, \dots, \alpha_5$  son coeficientes de proporcionalidad que dependen del área transversal del orificio que conecta los bancos y la constante de gravedad, y  $h_1, \dots, h_4$  la diferencia de altura entre los bancos.

Note que de acuerdo al modelo el nivel de cada banco es afectado por los cambios en el nivel del banco anterior y posterior y de los cambios en la apertura de la válvula banco anterior, además de la apertura de la válvula que se utiliza para controlar el nivel del banco, todos estos efectos luego se transforman

en perturbaciones para el nivel del banco. Además existen no linealidades provocadas por la diferencia de alturas y por la relación entre el coeficiente de la válvula y el flujo, dinámica que no es considerada en el modelo.

## 3. Identificación del sistema

En esta sección se presentan algunos aspectos importantes de la identificación del modelo realizada.

### 3.1. Selección del conjunto de modelos a utilizar

Para modelar el sistema se utiliza un modelo ARX (denominado así por sus nombre en inglés "Autoregressive Exogenous"), que posee la estructura presentada en (2).

$$A(z^{-1}) \cdot y(t) = B(z^{-1}) \cdot u(t) + e(t) \quad (2)$$

Donde  $A(z^{-1})$  y  $B(z^{-1})$  son polinomios que dependen del operador retraso  $z^{-1}$ ,  $y(t)$  son las salidas del modelo,  $u(t)$  las entradas,  $e(t)$  representa las perturbaciones a las que es sometida el sistema y  $t$  a la variable de tiempo discreto.

Esta estructura se considera adecuada para el modelo obtenido al linealizar (1) en torno a  $(\bar{q}_i, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_5, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_5)$ .

### 3.2. Experimento de identificación

En el experimento se utiliza como entrada una señal de ruido binario generalizado (GBN por sus siglas en inglés "Generalized Binary Noise"). Una señal de ruido binario generalizado es una señal que toma dos valores  $a$  y  $-a$  y que en cada tiempo de muestreo  $T_{min}$  puede cambiar de valor de acuerdo a la siguiente regla:

$$P[u(t) = -u(t-1)] = p_{sw} \quad (3a)$$

$$P[u(t) = u(t-1)] = 1 - p_{sw} \quad (3b)$$

Donde  $p_{sw}$  es la probabilidad de cambio. Esta señal tiene media cero, el tiempo de cambio promedio entre los dos niveles es:

$$ET_{sw} = \frac{T_{min}}{p_{sw}} \quad (4)$$

Tulleken (1990) demuestra que el espectro de la señal corresponde a:

$$\Phi_u(\omega) = \frac{a^2 \cdot T_{min} \cdot (1 - g^2)}{1 - 2g \cos(T_{min} \cdot \omega) + g^2} \quad (5)$$

Donde  $g = 1 - 2 \cdot p_{sw}$ .

Este espectro se puede manipular cambiando el valor de  $p_{sw}$ , que entrega un espectro plano para  $p_{sw}$ , y que a medida que disminuye a valores menores que 0.5 entrega una señal con espectro pasa bajos.

Para realizar el experimento se sigue el procedimiento presentado por Zhu (2001), el que indica que deben realizarse pruebas preliminares con el fin de obtener una estimación gruesa del tiempo de asentamiento más largo del sistema, el rango de operación del sistema y la amplitud adecuada para los cambios de

la entrada (binaria) del sistema. Y con estos datos se definen las características de la señal GBN y del experimento, con el fin de obtener una entrada concentrada en las bajas frecuencias, lo que es idóneo cuando el modelo se utiliza con fines de control.

Para identificar el modelo del sistema se utiliza el algoritmo de cuadrados mínimos. Zhu (2001) y Ljung (1999) presentan en detalle los aspectos teóricos de este algoritmo.

Se utiliza la validación cruzada como principal método para validar el sistema, es decir, se encuentra el modelo del sistema con un conjunto de datos, luego se compara la respuesta del sistema vs la respuesta del modelo para un conjunto de datos diferentes y se escoge el modelo cuya respuesta se acerca más a la del sistema real. Además se les da preferencia a modelos de órdenes bajos, para que el modelo sea consistente con (1).

### 3.3. Trabajo experimental

En este trabajo se utiliza una representación de múltiples entradas y una salida (o MISO por sus siglas en inglés "Multiple Input – Single Output") para representar el circuito de flotación, lo que tiene estricta relación con la implementación de la estrategia de control predictivo en donde se utiliza el modelo, ya que hay ventajas en poder controlar el nivel de pulpa de cada uno de los estanques por separado. Estos detalles son explicados en la sección 6.5.

Para realizar la identificación del proceso utilizando una señal GBN, es necesario obtener un estimado del tiempo de asentamiento más largo del proceso. Para lograr esto se realizan pruebas aplicando escalones a cada una de las entradas del proceso y midiendo el tiempo de asentamiento.

Tabla 1: Estimado del tiempo de asentamiento de cada banco

	Banco 1	Banco 2	Banco 3	Banco 4	Banco 5
Tiempo de asentamiento (segundos)	317	155	198	217	347

Para cada uno de los escalones aplicados se estima el tiempo de asentamiento y luego se calcula el promedio de estos datos para obtener un estimado del tiempo de asentamiento de cada banco, resultados que se presentan en la tabla 1. Luego siguiendo el procedimiento presentado en por Zhu (2001), el tiempo de cambio promedio de la señal GBN debe ser de:

$$ET_{sw} = \frac{98\% \cdot T_s}{3} = \frac{98\% \cdot 347}{3} = 113 \text{ s} \quad (6)$$

Se escoge el tiempo mínimo de la señal GBN de 20s, tiempo suficiente para observar un pequeño cambio en la respuesta del nivel en cada banco al generar una apertura en la válvula correspondiente.

La probabilidad de cambio de la señal GBN debe ser de:

$$p_{sw} = \frac{T_{min}}{ET_{sw}} = \frac{20 \text{ s}}{113 \text{ s}} = 0,1769 \quad (7)$$

Finalmente la probabilidad de cambio de la señal GBN se aproxima a  $p_{sw} \approx 0,2$ .

Teniendo estos parámetros se genera la señal GBN que se aplica como entrada, la cual se evalúa cada 20 segundos, y en donde la señal puede cambiar de valor de acuerdo a la regla:

$$s_i(0) = a_i \quad (8a)$$

$$P[s_i(t) = -s_i(t-1)] = 0,2 \quad (8b)$$

$$P[s_i(t) = s_i(t-1)] = 0,8 \quad (8c)$$

En donde  $a_i$  corresponde a la amplitud de la señal GBN y la salida de cada banco se calcula como:

$$u_i(t) = u_{EQi}(t) + s_i(0) \quad (9)$$

Con  $i = 1, \dots, 5$ .

$u_{EQi}(t)$  corresponde al valor que tiene la actuación respectiva antes de comenzar el experimento.

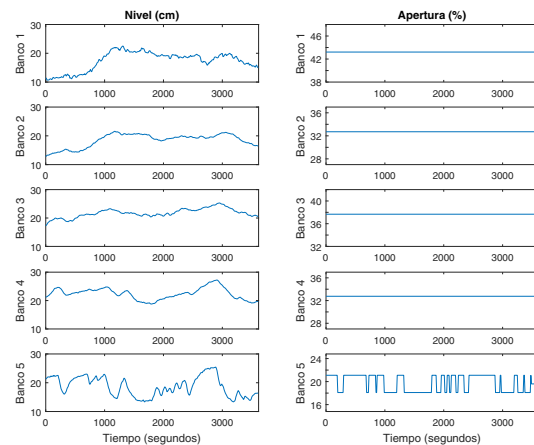


Figura 2: Gráfico de experimento de identificación en donde se aplica una entrada GBN al quinto banco.

Para identificar el sistema se realizan seis experimentos; en cinco de estos experimentos se manipula una entrada a la vez, manteniendo las otras fijas y se utilizan para estimar el modelo del nivel de cada uno de los bancos. En el sexto experimento se manipulan las cinco entradas a la vez y se utiliza para validar el modelo obtenido. En la figura 2 se muestra el quinto experimento.

Para encontrar el número de parámetros correctos para los modelos se utiliza el conocimiento del modelo, acotándose a buscar modelos de órdenes pequeños, se revisan los gráficos de la respuesta del modelo vs la respuesta del proceso, buscando que ésta sea lo más parecida posible y se analiza la respuesta a escalón del modelo obtenido que debe tener características similares a la respuesta del sistema obtenida anteriormente. En la figura 3 se presenta un gráfico en donde se compara la respuesta del modelo con la respuesta del proceso para el banco 2, en donde se logró un ajuste del 78.98 %.

A continuación se presentan los modelos de cada banco, junto con el ajuste a los datos de validación de cada uno de ellos. Estos modelos fueron obtenidos con cuadrados mínimos y poseen un tiempo de muestreo de 10 segundos.

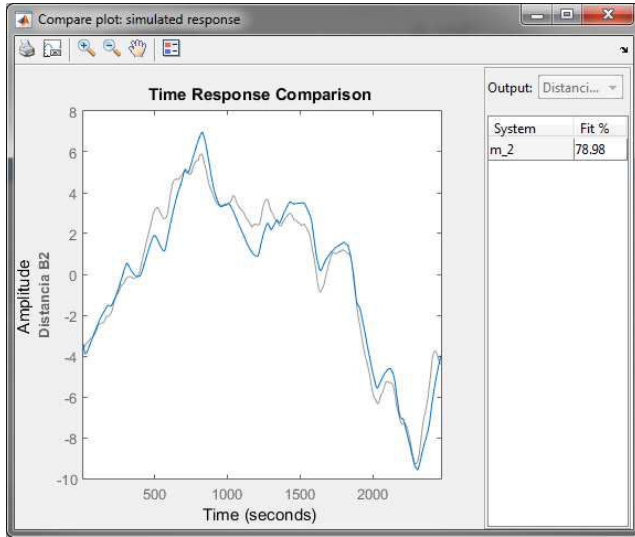


Figura 3: Respuesta del modelo vs respuesta del nivel de pulpa del banco 2 en experimento de validación.

#### Modelo del nivel de pulpa del banco 2:

$$A_2(z^{-1})y_2(t) = B_{21}(z^{-1})y_1(t) + B_{22}(z^{-1})y_3(t) + B_{23}(z^{-1})u_1(t) + B_{24}(z^{-1})u_2(t) + e(t) \quad (10)$$

Donde:

$$\begin{aligned} A_2(z^{-1}) &= 1 - 1,262 \cdot z^{-1} + 0,323 \cdot z^{-2} \\ B_{21}(z^{-1}) &= 0,03253 \cdot z^{-2} & B_{22}(z^{-1}) &= 0,03309 \cdot z^{-2} \\ B_{23}(z^{-1}) &= -0,05044 \cdot z^{-1} \\ B_{24}(z^{-1}) &= 0,04996 \cdot z^{-1} + 0,1085 \cdot z^{-2} \end{aligned}$$

Ajuste con datos de validación: 78.98 %

#### Modelo del nivel de pulpa del banco 3:

$$A_3(z^{-1})y_3(t) = B_{31}(z^{-1})y_2(t) + B_{32}(z^{-1})y_4(t) + B_{33}(z^{-1})u_2(t) + B_{34}(z^{-1})u_3(t) + e(t) \quad (11)$$

Donde:

$$\begin{aligned} A_3(z^{-1}) &= 1 - 1,247 \cdot z^{-1} + 0,1184 \cdot z^{-2} + 0,1836 \cdot z^{-3} \\ B_{31}(z^{-1}) &= 0,02126 \cdot z^{-2} \\ B_{32}(z^{-1}) &= 0,04923 \cdot z^{-2} - 0,02297 \cdot z^{-3} \\ B_{33}(z^{-1}) &= -0,1107 \cdot z^{-1} & B_{34}(z^{-1}) &= 0,08532 \cdot z^{-1} \end{aligned}$$

Ajuste con datos de validación: 39.09 %

#### Modelo del nivel de pulpa del banco 4:

$$A_4(z^{-1})y_4(t) = B_{41}(z^{-1})y_3(t) + B_{42}(z^{-1})y_5(t) + B_{43}(z^{-1})u_3(t) + B_{44}(z^{-1})u_4(t) + e(t) \quad (12)$$

Donde:

$$\begin{aligned} A_4(z^{-1}) &= 1 - 1,359 \cdot z^{-1} + 0,4036 \cdot z^{-2} \\ B_{41}(z^{-1}) &= 0,03459 \cdot z^{-2} - 0,02095 \cdot z^{-3} \\ B_{42}(z^{-1}) &= -0,04453 \cdot z^{-2} + 0,06875 \cdot z^{-3} \\ B_{43}(z^{-1}) &= -0,01881 \cdot z^{-1} - 0,05282 \cdot z^{-2} \\ B_{44}(z^{-1}) &= 0,08029 \cdot z^{-1} \end{aligned}$$

Ajuste con datos de validación: 59.01 %

#### Modelo del nivel de pulpa del banco 5:

$$A_5(z^{-1})y_5(t) = B_{51}(z^{-1})y_4(t) + B_{52}(z^{-1})u_4(t) + B_{53}(z^{-1})u_5(t) + e(t) \quad (13)$$

Donde:

$$\begin{aligned} A_5(z^{-1}) &= 1 - 1,503 \cdot z^{-1} + 0,5566 \cdot z^{-2} \\ B_{51}(z^{-1}) &= 0,1021 \cdot z^{-1} - 0,07848 \cdot z^{-2} \\ B_{52}(z^{-1}) &= -0,1247 \cdot z^{-1} & B_{53}(z^{-1}) &= 0,1489 \cdot z^{-1} \end{aligned}$$

Ajuste con datos de validación: 71.66 %

## 4. Algoritmos genéticos

Para resolver el problema de optimización presente en la estrategia de control predictivo se utiliza una herramienta basada en algoritmos genéticos, a continuación se hace una reseña de éste algoritmo de optimización. Se recomienda revisar (Goldberg (1989)) y (Haupt and Haupt (2004)) para obtener más detalles sobre esta técnica de optimización.

Los algoritmos genéticos corresponden a una técnica de optimización que imita la estrategia de la supervivencia del más apto, presente en la naturaleza, para encontrar la solución de un problema de optimización. En los algoritmos genéticos se define un espacio finito para las variables a optimizar y luego se utiliza la teoría de la supervivencia del más apto, para generar soluciones que se acerquen más al óptimo, hasta encontrar dicho valor, lo que se realiza mediante un procedimiento de evaluación de la función objetivo y combinación de las soluciones adecuado.

Para realizar los cálculos que permiten hacer evolucionar los valores que van tomando las variables es necesario cuantificar los datos. Con esto, se define el espacio de búsqueda de las variables a optimizar y además los valores que pueden tomar las soluciones se transforman en un arreglo de bits (que luego se conoce como cromosoma), lo que luego sirve en la etapa de reproducción de las soluciones. Dentro del procedimiento de cuantificación se define el rango de valores que podrán tomar las variables a optimizar (el valor mínimo y máximo que pueden tomar las variables). En este trabajo la herramienta de optimización realiza una cuantificación uniforme, por lo que además la separación entre los valores que pueden tomar las variables a optimizar son constantes y se definen mediante parámetro denominado nivel de cuantificación. El algoritmo genético comienza, entonces, definiendo los cromosomas, que tienen un

costo que se calcula mediante una función de costo, que también debe ser definida.

Luego de haber codificado las variables a optimizar, se lleva a cabo el procedimiento que hace evolucionar la solución al óptimo, que corresponde a:

1. *Creación de la población inicial:* El algoritmo genético comienza con un conjunto de  $N_{pob}$  cromosomas al que se le conoce como población. Estos cromosomas corresponden a un conjunto de palabras binarias, que son escogidas al azar, y que están dentro del espacio de búsqueda de las soluciones.
2. *Evaluación de la función de costo:* Cada uno de los valores de la población deben ser evaluados en la función de costo. Ésta entrega un valor numérico con el que luego se decide si la población debe reproducirse o no.
3. *Selección de las parejas a reproducirse:* Para elegir las parejas que van a reproducirse se debe utilizar un procedimiento de selección natural, en donde un porcentaje de cromosomas con el costo más bajo pasan a la etapa de reproducción y el resto se descarta.
4. *Reproducción:* Los cromosomas que fueron descartados, luego deben ser reemplazados por nuevas cromosomas. Los algoritmos genéticos realizan un proceso de reproducción, en donde los cromosomas que no fueron descartados se mezclan para generar los cromosomas faltantes de la población. La forma más común de reproducción consiste en generar dos hijos a partir de dos padres. En el proceso de reproducción se consideran los cromosomas como un arreglo de bits, luego se escoge un punto de cruce y a partir de este punto se separa a cada padre en dos arreglos de bits, luego para generar cada uno de los hijos se unen uno de los arreglos de bits del primer padre con un arreglo de bits del segundo padre. Un ejemplo del proceso de reproducción se presenta en la figura 4. Cabe destacar que la reproducción ocurre con cierta probabilidad, conocida como probabilidad de cruce, en caso de que la reproducción no ocurra, los hijos obtenidos son igual a los padres.
5. *Mutación:* Luego de haber obtenido la población faltante, se realiza un procedimiento en donde algunos de los bits de cada uno de los cromosomas de la población se cambia de manera aleatoria, con una probabilidad pequeña.
6. *Chequeo de condición de término:* En este trabajo la condición de término corresponde a iterar el procedimiento realizado por el algoritmo genético un número de veces determinado. En caso de que no se llegue a la condición de término, el algoritmo vuelve al paso de evaluación de la función de costo con la nueva población, comenzando una nueva iteración. En caso de que se cumpla con la condición de término, el algoritmo genético termina.

Para encontrar la solución óptima, el algoritmo genético itera el procedimiento anterior, comenzando con el paso 1, y luego repitiendo los pasos 2 – 6 hasta cumplir con la condición de término. Esto hará que las variables a optimizar se evalúen muchas veces dentro del espacio de búsqueda definido, luego



Figura 4: Ejemplo de proceso de reproducción en algoritmos genéticos.

el algoritmo al imitar la estrategia de la supervivencia del más apto, tiende a hacer evolucionar las respuestas hacia la solución del problema de optimización. Finalmente, cuando se llega a la condición de término el algoritmo entrega como solución los valores de las variables a optimizar que obtuvieron el costo más bajo dentro de las iteraciones realizadas.

## 5. Representación de estados

Uno de los mayores problemas presentes en el trabajo es que no se puede asegurar la calidad de la medición de los sensores y que hay ruido de medición en el sistema. Al implementar otras estrategias de control predictivo, como GPC (por sus siglas en inglés "Generalized Predictive Control"), no se obtuvo un buen desempeño, ya que el ruido de medición genera perturbaciones en el rango de frecuencias medio-alto, que no se logran compensar, y que luego se propagan por el sistema, empeorando el rendimiento de la estrategia de control predictivo. Este problema debe ser atacado, ya que es el rendimiento de los sensores lo que empeora el rendimiento de la estrategia. Para poder compensar el efecto del ruido, se utiliza un filtro de Kalman, lo que reduce notablemente su efecto en el sistema, y para poder utilizar el filtro de Kalman, se requiere utilizar una representación de estados del modelo obtenido.

En el trabajo, del modelo ARX obtenido, se considera sólo la parte determinística (relación entre entradas y salidas) del sistema, y se representa mediante:

$$x(t+1) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \quad (14a)$$

$$y(t) = C \cdot x(t) \quad (14b)$$

Donde  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$  corresponde al vector de estados,  $u \in \mathbb{R}^{n_u}$  al vector de entrada,  $y \in \mathbb{R}^{n_y}$  al vector de salida y  $A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$ . Cabe destacar que ninguno de los modelos obtenidos posee paso directo ya que hay retardos entre las entradas y salidas del sistema.

### 5.1. Filtro de Kalman

El filtro de Kalman es un estimador de estados recursivo, diseñado de manera óptima, que minimiza la siguiente suma cuadrática:

$$E\{e_x^T(t) \cdot e_x(t)\} = E\{e_{x_1}^2(t) + e_{x_2}^2(t) + \dots + e_{x_n}^2(t)\} \quad (15)$$

Donde  $e_x(t) = x(t) - \hat{x}(t|t)$  y  $\hat{x}(t|t)$  es la estimación del estado ( $x(t)$ ) en tiempo  $t$ , con las mediciones obtenidas hasta el tiempo  $t$ . Este estimador asume que se tiene un modelo lineal, que posee perturbaciones estocásticas (ruido blanco) en la ecuación de estados como en la ecuación de salida.

### Formulación del problema

Considere el sistema representado por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x(t+1) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) + w(t) \quad (16a)$$

$$y(t) = C \cdot x(t) + v(t) \quad (16b)$$

Donde los vectores  $w \in \mathbb{R}^{n_x}$  y  $v \in \mathbb{R}^{n_y}$  corresponden a variables aleatorias multivariadas, que representan ruido de proceso (incerteza en el modelo) y ruido de medición respectivamente y  $w \sim N(0, P_w)$ ,  $v \sim N(0, P_v)$  y el valor inicial del estado  $x(0) \sim N(\mu_0, P_0)$ .

El estimado a priori (con los datos obtenidos hasta  $t-1$ ) se calcula como:

$$\hat{x}(t|t-1) = A \cdot \hat{x}(t-1|t-1) + B \cdot u(t-1) \quad (17a)$$

$$P(t|t-1) = A \cdot P(t-1|t-1) \cdot A^T + P_w \quad (17b)$$

Cuando la nueva medición  $y(t)$  se encuentra disponible la estimación se actualiza mediante:

$$K(t) = P(t|t-1) \cdot C^T (C \cdot P(t|t-1) C^T + P_v)^{-1} \quad (18a)$$

$$\hat{x}(t|t) = \hat{x}(t|t-1) + K(t) \cdot (y(t) - C \cdot \hat{x}(t|t-1)) \quad (18b)$$

$$P(t|t) = (I - K(t) \cdot C) \cdot P(t|t-1) \quad (18c)$$

Al diseñar un filtro de Kalman  $P_v$ ,  $P_w$ ,  $\mu_0$  y  $P_0$  son parámetros de diseño. En la mayoría de las aplicaciones estos valores no son conocidos, por lo que deben ser ajustados de manera experimental.

### 5.2. Representación de estados aumentada

Una práctica común para compensar perturbaciones no medibles consiste en realizar alguna suposición de la forma que tiene dicha perturbación y extender la representación de estados del sistema, incluyendo dicha perturbación como parte del modelo.

En este trabajo se considera que el sistema se somete a perturbaciones constantes que no se pueden medir, que se aplican en la salida del sistema durante el horizonte de predicción, por lo que la perturbación tiene la forma:

$$d(t+1) = d(t) \quad (19)$$

Luego si  $y(t)$  corresponde a la salida del modelo presentado en (16), la salida que considera la perturbación  $y_d(t)$  corresponde a:

$$y_d(t) = y(t) + d(t) \quad (20)$$

Luego el sistema presentado en (16) se puede extender como:

$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ d(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ d(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (21a)$$

$$y_d(t) = \begin{bmatrix} C & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ d(t) \end{bmatrix} \quad (21b)$$

Al utilizar este modelo las perturbaciones no medibles con forma constante son estimadas con el filtro de Kalman, por lo tanto son consideradas y luego compensadas al resolver el problema de optimización formulado en la estrategia de control predictivo.

### 5.3. Trabajo experimental

Dentro del trabajo se utiliza una representación de estados para modelar la parte determinística de los modelos obtenidos en la sección 3.3 y luego dicha representación es aumentada siguiendo el procedimiento presentado en la sección anterior, con lo que se obtienen las siguientes representaciones de estados para cada banco:

$$x_{mai}(t+1) = A_i \cdot x_{mai}(t) + B_i \cdot U_{mi}(t) \quad (22a)$$

$$y_i(t) = C_{ai} \cdot x_{mai}(t) \quad (22b)$$

con  $i = 2, \dots, 5$ .

Los parámetros de la representación de estados se presentan a continuación.

#### Parámetros de la representación de estados del banco 2:

$$A_{a2} = \begin{bmatrix} 0 & -0,6460 & 0 \\ 0,5 & 1,2624 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_{a2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0,4339 \\ 0,0651 & 0,0662 & -0,1009 & 0,0999 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{a2} = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 & 1 \end{bmatrix} \quad U_{m2}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_3(t) \\ u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

#### Parámetros de la representación de estados del banco 3:

$$A_{a3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0,3673 & 0 \\ 0,5 & 0 & -0,1184 & 0 \\ 0 & 1 & 1,2466 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_{a3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0459 & 0 & 0 \\ 0,0425 & 0,0985 & -0,2214 & 0,1706 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{a3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,5 & 1 \end{bmatrix} \quad U_{m3}(t) = \begin{bmatrix} y_2(t) \\ y_4(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix}$$

#### Parámetros de la representación de estados del banco 4:

$$A_{a4} = \begin{bmatrix} 0 & -0,8073 & 0 \\ 0,5 & 1,3593 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_{a4} = \begin{bmatrix} -0,0838 & 0,275 & -0,2113 & 0 \\ 0,0692 & -0,0891 & -0,0376 & 0,1606 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{a4} = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 & 1 \end{bmatrix} \quad U_{m4}(t) = \begin{bmatrix} y_3(t) \\ y_5(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix}$$

### Parámetros de la representación de estados del banco 5:

$$A_{a5} = \begin{bmatrix} 0 & -0,5566 & 0 \\ 1 & 1,5032 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad U_{m5}(t) = \begin{bmatrix} y_4(t) \\ u_4(t) \\ u_5(t) \end{bmatrix}$$

$$B_{a5} = \begin{bmatrix} -0,157 & 0 & 0 \\ 0,2042 & -0,2494 & 0,2977 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C_{a5} = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 & 1 \end{bmatrix}$$

## 6. Control Predictivo

El control predictivo es una estrategia de control basada en la optimización numérica, en donde se utiliza un modelo del sistema para predecir las respuestas futuras de la planta a una entrada determinada y para encontrar la actuación adecuada a aplicar en cada instante se resuelve un problema de optimización adecuado. Este problema de optimización se resuelve en intervalos regulares con el fin de encontrar la actuación óptima a aplicar en cada instante de muestreo, de acuerdo a las condiciones actuales del sistema.

La estrategia de control predictivo presenta tres componentes principales: el elemento de predicción, el de optimización y una estrategia de horizonte móvil. A continuación se presenta cada uno de estos componentes.

### 6.1. Predicción

La respuesta futura de la planta es predicha utilizando un modelo de su dinámica. En este trabajo se utiliza un modelo con la forma presentada en (14), en donde los estados no se conocen por lo que son estimados con el filtro de Kalman, los que se denominan  $\hat{x}(t)$ , y corresponden al estimado del filtro obtenido en (18b), adicionalmente  $u(t)$  e  $y(t)$  corresponden a la entrada y la salida del sistema en el instante  $t$  respectivamente. Con dichas consideraciones las predicciones del sistema evolucionan de acuerdo a:

$$\hat{y}(t+1) = C \cdot A \cdot \hat{x}(t) + C \cdot B \cdot \hat{u}(t) \quad (23a)$$

$$\begin{aligned} \hat{y}(t+2) &= C \cdot A \cdot \hat{x}(t+1) + C \cdot B \cdot \hat{u}(t+1) \\ &= C \cdot A \cdot (A \cdot \hat{x}(t) + B \cdot \hat{u}(t)) + C \cdot B \cdot \hat{u}(t+1) \\ &= C \cdot A^2 \cdot \hat{x}(t) + C \cdot A \cdot B \cdot \hat{u}(t) \\ &\quad + C \cdot B \cdot \hat{u}(t+1) \end{aligned} \quad (23b)$$

⋮

$$\begin{aligned} \hat{y}(t+N_p) &= C \cdot A^{N_p} \cdot \hat{x}(t) + C \cdot A^{N_p-1} \cdot B \cdot \hat{u}(t) \\ &\quad + C \cdot A^{N_p-2} \cdot B \cdot \hat{u}(t+1) + \dots \\ &\quad + C \cdot A \cdot B \cdot \hat{u}(t+N_p-1) + C \cdot B \cdot \hat{u}(t+N_p) \end{aligned} \quad (23c)$$

La notación  $\hat{y}$  se utiliza para representar que se está utilizando un estimado de  $y$ .

La estrategia supone que la actuación cambia un número de muestras  $N_u$  conocido como horizonte de control y luego se mantiene fija. Esto permite reducir el número de variables a optimizar por el algoritmo de optimización. Al igual que el horizonte de predicción  $N_p$ , el horizonte de control  $N_u$  es variable de diseño en cualquier estrategia de control predictivo. Algunas consideraciones sobre estos parámetros al diseñar una estrategia de control predictivo son que: al aumentar el horizonte de control  $N_u$ , las soluciones obtenidas tienden a mejorar el transiente del de la respuesta del lazo cerrado, al aumentar el horizonte de predicción  $N_p$ , la solución obtenida considera en mayor medida la respuesta en estacionario, tendiendo a suavizar la respuesta entregada por la estrategia de control predictivo. Debido a lo anterior es recomendable que el horizonte de control sea más pequeño que el horizonte de predicción, con el fin de optimizar el comportamiento en estado estacionario y no solo en el transiente ya que esto tiende a hacer que la respuesta de la estrategia de control sea inestable. Además es recomendable que el horizonte de predicción sea más grande que el tiempo de asentamiento del sistema. Teóricamente manipular estos valores, sobre todo el horizonte de predicción, no tiene un efecto muy grande entre una o dos muestras más, pero en la práctica, debido a los errores de modelado, perturbaciones no modeladas, etcétera a veces cambios en estos parámetros, por pequeños que sean si producen efectos grandes en el desempeño de la estrategia de control predictivo. En capítulo 5 de (Rossiter (2013)) se realiza un análisis más detallado sobre la elección de estos parámetros.

### 6.2. Problema de optimización

El control predictivo calcula la actuación a aplicar resolviendo un problema de optimización que se define en términos de las secuencias predichas de  $y(t)$  y las actuaciones futuras de  $u(t)$ . Generalmente la función objetivo toma la forma:

$$\begin{aligned} J(t) &= \sum_{k=0}^{N_p} \left( (\hat{y}^T(t+k) - r(t)) \cdot R_y \cdot (\hat{y}(t+k) - r(t)) \right) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{N_p} \left( \Delta \hat{u}^T(t+k) \cdot R_u \cdot \Delta \hat{u}(t+k) \right) \end{aligned} \quad (24)$$

Donde  $R_y$  es una matriz definida positiva,  $R_u$  es una matriz semi-definida positiva,  $r(t)$  es el valor de la referencia en el instante  $t$ , y:

$$\Delta \hat{u}(t+k) = \hat{u}(t+k) - \hat{u}(t+k-1) \quad (25)$$

Claramente  $J(t)$  es una función de los cambios de las actuaciones presentes y futuras que todavía no son aplicadas, por lo que el problema de optimización a solucionar consiste en encontrar la secuencia óptima  $\Delta \hat{U}^*$ :

$$\Delta \hat{U}^* = \begin{bmatrix} \Delta \hat{u}^*(t) \\ \Delta \hat{u}^*(t+1) \\ \vdots \\ \Delta \hat{u}^*(t+N_u-1) \end{bmatrix} = \arg \min_{\Delta \hat{u}^*(t+k)} J(t) \quad (26)$$

para  $k = 0, \dots, N_u - 1$ .

Note que si la planta es sujeta a restricciones de entrada y salida, estas pueden incluirse en el problema de optimización.



### 6.3. Estrategia de horizonte móvil

Al implementar la estrategia de control predictivo, se obtiene la secuencia de los cambios de las entradas óptimos  $\Delta\hat{U}^*$  resolviendo el problema de optimización y luego sólo se aplica la primera actuación. Luego se vuelve a resolver el problema de optimización considerando el nuevo conjunto de mediciones. Esto compensa el hecho de que el horizonte de predicción es finito e introduce realimentación a la ley del controlador predictivo.

### 6.4. Restricciones

Una de las mayores ventajas del control predictivo en comparación con otras estrategias de control consiste en la habilidad de manejar restricciones de forma sistemática.

#### Restricciones en algoritmos genéticos

En este trabajo se utiliza una función de penalidad para lidiar con las restricciones al utilizar los algoritmos genéticos. El objetivo de las funciones de penalidad es agregar un factor a la función objetivo de manera que ésta tenga un valor muy grande cuando una de las restricciones no se cumpla, con el fin que el algoritmo genético rechace las soluciones que no cumplan las restricciones.

La función de penalidad utilizada para resolver una restricción del tipo  $g(x) \leq 0$  en este trabajo es:

$$J_r = \rho \cdot \max(0, g(x))^2 \quad (27)$$

Donde  $\rho$  es una constante de valor grande.

Luego la función objetivo a resolver en el problema de optimización utilizando los algoritmos genéticos tiene la forma:

$$J(t) = \sum_{k=0}^{N_p} \left( (\hat{y}^T(t+k) - r(t)) \cdot R_y \cdot (\hat{y}(t+k) - r(t)) \right) + \sum_{k=0}^{N_p} \left( \Delta\hat{u}^T(t+k) \cdot R_u \cdot \Delta\hat{u}(t+k) \right) + J_r \quad (28)$$

No existe problema en incluir más de una restricción, en cuyo caso se debe crear una función de penalidad por cada restricción del tipo  $g(x) \leq 0$ , con (27) y luego cada una de ellas debe ser añadida a la función, igual que en (28).

Adicionalmente hay restricciones para  $\Delta\hat{u}(t+n)$ ,  $n = 0, \dots, N_u$  que se generan inherentemente al utilizar como herramienta de optimización un algoritmo genético. Ya que los algoritmos genéticos requieren que se defina un espacio de búsqueda para las variables a optimizar, que en este caso son las variables indicadas anteriormente. Al definir el espacio de búsqueda se debe definir un valor mínimo y un valor máximo, lo que entonces agrega las restricciones:  $\Delta u_{\min_n} \leq \Delta\hat{u}(t+n) \leq \Delta u_{\max_n}$ ,  $n = 0, \dots, N_u$  a la estrategia de control predictivo. Note que en este caso no es necesario incluir la restricción dentro de la función objetivo y en el caso del software específico, solo es necesario ingresar estos valores como parámetros para las variables a optimizar. Note que estas restricciones pueden considerarse como una desventaja de la implementación de la estrategia de control, ya que vienen impuestas por el uso de los algoritmos

genéticos como algoritmo de optimización. En este caso la prioridad es implementar la estrategia de control predictivo con las herramientas disponibles, lo que obliga a buscar formas de lidiar con esta restricción.

### 6.5. Trabajo experimental

La estrategia de control predictivo formulada corresponde a una estrategia de múltiples entradas y una salida (MISO) que permite controlar los bancos de manera independiente, en donde el comportamiento del nivel de cada banco se predice en función de los niveles de los bancos contiguos y de la apertura de las válvulas (actuadores) del banco anterior, y de su propio banco.

Es posible diseñar una estrategia de múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO por sus siglas en inglés "Multiple Input – Multiple Output") en donde se calculen las cinco entradas que minimizan un criterio que considere el error de seguimiento de los cinco bancos y la energía de las cinco actuaciones a la vez, pero existen algunas desventajas prácticas al implementar dicha estrategia, ya que cualquier problema en un banco (errores en la instrumentación, los equipos etc) obliga a desactivar la estrategia completa, lo mismo ocurre si hay algún problema de control (por ejemplo debido a la poca precisión de un modelo) que empeora el desempeño de la estrategia. En el caso de una estrategia MISO se puede desactivar el control de un banco y seguir utilizando la estrategia de control predictivo en los otros bancos, lo que mejora la utilización de la estrategia. Por último en el caso de los bancos de flotación Rougher es mejor considerar el seguimiento de referencias de cada banco por separado, en vez de un criterio que considere el seguimiento de referencias ponderado de los cinco bancos, ya que bajo algunas circunstancias esto hará que se sacrifique el seguimiento en un banco para compensar en otro, lo que puede provocar efectos indeseados en el proceso, como el rebose descontrolado en uno o más bancos que no presenten problemas. Debido a lo anterior en este trabajo se implementa una estrategia MISO para resolver el problema de control de nivel de pulpa de los bancos de flotación primaria.

El problema de optimización a resolver corresponde al presentado en (26). El modelo se implementa utilizando variables de estados, el que es aumentado para considerar perturbaciones no medibles con forma constantes y utiliza un filtro de Kalman, el cual utiliza la medición de la salida  $y_i(t)$  con  $i = 2, \dots, 5$ , para estimar todos los estados del modelo, que incluyen la perturbación constante. La estrategia de control predictivo aplica una acción de control cada 10 segundos.

Es necesario destacar que en el circuito de flotación, el nivel de pulpa del primer banco depende de flujo de entrada (representado como  $q_i$  en (1)) y este flujo no tiene forma constante, sino que cambia dependiendo de las condiciones del proceso anterior. Hay momentos donde el flujo  $q_i$  disminuye bruscamente (por ejemplo cuando se detiene una de las dos bombas en el proceso anterior), lo que genera problemas en la estrategia de control predictivo, ya que la estrategia considera restricciones sobre  $\Delta\hat{u}_i(t+n)$ ,  $n = 0, \dots, N_u - 1$ , restricciones que provienen de la cuantificación de estas variables dentro de los algoritmos genéticos, por lo que no pueden ser eliminadas y que hacen que

la estrategia reaccione más lento que un PID, que actúa sin este tipo de restricciones y por lo tanto genera actuaciones grandes ante este tipo de cambios. En este caso particular el objetivo de la estrategia de control predictivo es compensar las perturbaciones que se pueden medir, y en el primer banco la perturbación principal no se puede medir y además la estrategia de control predictivo responde más lento que un controlador PID ante cambios grandes en el flujo de entrada por lo que se opta por controlar el primer banco con un controlador PID.

Luego en los bancos 2, 3, 4 y 5 se resuelve el problema de optimización presentado en (29) para encontrar la actuación a aplicar en cada banco.

$$\Delta U_i^* = \arg \min_{\substack{\Delta \hat{u}_i(t+l) \\ l=0, \dots, N_u-1}} \sum_{k=1}^{N_{pi}} (\hat{y}_i(t+k) - r_i(t))^2 + \sigma_i \sum_{j=0}^{N_u-1} (\Delta \hat{u}_i(t+j))^2$$

$$\text{s.t. } 0 \leq \hat{u}_i(t) \leq 100$$

$$0 \leq \hat{y}_i(t+m) \leq 50, \quad m = 1, \dots, 7.$$

$$-3 \leq \Delta \hat{u}_i(t+n) \leq 3, \quad n = 0, \dots, N_u - 1. \quad (29)$$

para  $i = 2, \dots, 5$ .

Para el horizonte de predicción se sigue la recomendación mencionada en la sección 6.1. Luego la estrategia se prueba con distintos valores para el horizonte de control  $N_u$ , de lo que se observa que al aumentar el valor de este parámetro se obtiene una respuesta con una mejor dinámica, pero que al mismo tiempo, al aumentar el valor de este parámetro, el tiempo que demora el algoritmo genético en entregar una respuesta aumenta exponencialmente (para  $N_u = 1$  el tiempo de 0.504 segundos, para  $N_u = 2$  de 2.140 segundos y para  $N_u = 3$  de 7.321 segundos). Debido a que la mejora en la dinámica del sistema es marginal, que el tiempo de muestreo de la estrategia de control es de 10 segundos y que por lo mismo es preferible que la estrategia tenga un tiempo de respuesta pequeño se escoge  $N_u = 2$ . En el banco 2, se observó que los cambios del horizonte de control afectan la respuesta de la estrategia, haciéndola demasiado lenta, por lo que fue necesario disminuir el horizonte de control, lo que mejora la respuesta del banco ante cambios bruscos de las actuaciones del primer banco (que funciona con un controlador PID). Luego los parámetros  $\sigma_i$ ,  $i = 2, \dots, 5$  son la forma principal de manipular la velocidad de respuesta del lazo, ya que a mayor valor, hacen que el control responda más lento, y a menor valor hacen que la respuesta sea más rápida. Los valores de estos parámetros se escogen de manera práctica, buscando que la velocidad de respuesta del lazo sea suave, para evitar cambios bruscos de las actuaciones al compensar perturbaciones. Los parámetros  $\sigma_i$  y  $N_{pi}$ ,  $i = 2, \dots, 5$  que entrega un mejor desempeño es diferente para cada banco y corresponden a:  $\sigma_2 = 0,9$ ,  $N_{p2} = 17$ ,  $\sigma_3 = 3$ ,  $N_{p3} = 30$ ,  $\sigma_4 = 1,5$ ,  $N_{p4} = 30$ ,  $\sigma_5 = 1$ ,  $N_{p5} = 30$ .

Para el cálculo de las predicciones en el modelo de los bancos 2, 3, 4 y 5 se asume que los niveles de los bancos contiguos se mantienen constante durante el horizonte de predicción y que la secuencia futura de la actuación del banco anterior, corresponde a la secuencia calculada por el problema de optimización del banco anterior. Para realizar lo anterior los problemas de op-

timización se resuelven de manera secuencial, partiendo por el banco 2 y terminando en el banco 5. Como el primer banco trabaja con un controlador PID, no hay una secuencia futura que se pueda utilizar como predicción en el banco 2, por lo que se considera que esta actuación se mantiene constante durante el horizonte de predicción. Para implementar la estrategia de manera secuencial se programan cuatro algoritmos genéticos, uno para cada problema de optimización y se resuelve primero el problema del banco 2, con las suposiciones descritas anteriormente, este algoritmo entrega una solución, la cual se aplica inmediatamente. Luego se resuelve el problema del banco 3, utilizando en el modelo de predicción la secuencia de actuación entregada por el problema de optimización del banco 2, obteniendo una solución, que nuevamente se aplica inmediatamente. Luego la solución del banco 3 se utiliza en el problema de optimización del banco 4, y con la solución obtenida se realiza lo mismo en el banco 5.

Las restricciones consideran que las aperturas de los actuadores  $u_i(t)$  se mueven entre 0 y 100 % y que la salida debe estar entre 0 y 50 centímetros, que corresponde a las dimensiones físicas del banco. Adicionalmente, la herramienta de optimización necesita que los datos sean cuantificados, por lo que hay que especificar el rango de las variables a optimizar y la distancia entre los niveles de cuantificación. Analizando datos históricos se observa que el cambio máximo de las actuaciones es de aproximadamente 3 % cada 10 segundos (tiempo de muestreo de la estrategia de control). De aquí sale la última restricción, que indica que de los cambios en la actuación varían entre -3 % y 3 %. En la herramienta de optimización se escoge una distancia entre niveles de cuantificación de 0,1 %. Lo anterior implica que la actuación solo podrá tomar los valores [-3 %, -2,9 %, -2,8 %, ..., 2,9 %, 3 %], no se justifica que la distancia entre niveles de cuantificación sea menor ya que la válvula no es capaz de generar cambios en la actuación tan precisos y el tiempo de cálculo del algoritmo aumenta a medida que este valor disminuye.

Se utiliza la siguiente estrategia para resolver el problema anterior en los bancos 2, 3, 4 y 5 y encontrar la actuación a aplicar:

1. El filtro de Kalman obtiene  $\hat{x}_{mai}(t)$ , para  $i = 2, \dots, 5$ , mediante el conjunto de ecuaciones presentado en (17) y (18), con el modelo presentado en (22).
2. Se calculan las predicciones mediante (23), considerando que el estado del sistema  $x_{mai}(t)$  es igual a la estimación obtenida con el filtro de Kalman  $\hat{x}_{mai}(t)$ .
3. Todas las restricciones se plantean con la forma  $g(x_{mai}(t)) \leq 0$  y luego se utiliza la función de penalidad presentada en (27) para cada una de ellas.
4. Se utiliza la función objetivo presentada en (28), añadiendo todas las funciones de penalidad obtenidas en (27).
5. Se resuelve el problema presentado en (29) con un horizonte de control  $N_u = 2$ , mediante la herramienta de optimización basada en algoritmos genéticos.
6. Se aplica  $u_i(t) = u_i(t-1) + \Delta u_i^*(t)$ .

Tabla 2: Resumen de promedio, desviación estándar del error de seguimiento, el error absoluto medio (EAM) y el error cuadrático medio (ECM) en el circuito de flotación primario

		Banco 2	Banco 3	Banco 4	Banco 5
Promedio (cm)	MPC	0,469	0,458	0,138	0,038
	PID	-0,250	-0,047	0,028	-0,009
Desviación estándar (cm)	MPC	1,351	1,050	0,731	0,579
	PID	1,836	1,967	2,242	1,467
Mejora porcentual		26 %	47 %	67 %	61 %
EAM (cm)	MPC	1,153	0,877	0,530	0,349
	PID	1,109	1,339	1,558	1,023
ECM (cm <sup>2</sup> )	MPC	3,345	1,719	0,731	0,316
	PID	4,659	3,844	4,920	2,170

## 7. Resultados

El objetivo de la estrategia de control predictivo es reducir la varianza del nivel en los bancos del circuito primario de flotación. Para confirmar lo anterior se realiza un análisis en donde consideran 7 periodos de pruebas "on/off" muestreados cada 5 segundos, que poseen una duración mínima de 1.5 horas para cada prueba. En estos periodos se compara el promedio y la varianza del error de seguimiento ( $r_i(t) - y_i(t)$ , para  $i = 2, \dots, 5$ ) cuando se utiliza la estrategia de control predictivo vs el control mediante controladores PID que cuentan con una acción de anti-enrollamiento. En los resultados de estos 7 experimentos se promedian y se presentan en la tabla 2. Dicha tabla no considera el banco 1 ya que éste banco continúa siendo controlado mediante un controlador PID.

En la tabla 2 se observa que en promedio el error de seguimiento es mayor en la estrategia de control predictivo que en la del control PID. Esto no presenta un problema muy grave en la operación del proceso, ya que a pesar de que hay diferencias estas son milimétricas y despreciables al lado del rango de operación del nivel de pulpa de los bancos (0 a 50 centímetros), pero indica que la estrategia es más débil para compensar el error en estado estacionario que el controlador PID. Por otro lado la varianza se reduce considerablemente, sobre todo para los dos últimos bancos, llegando a haber una disminución de hasta un 67 % en el cuarto banco. Para dimensionar la mejora que esto produce se presenta la figura 5, que muestra el efecto que tiene cambiar del control PID (estado de estrategia MPC igual a 0) a la estrategia de control predictivo (estado de estrategia MPC igual a 1), en donde se observa una mejora casi inmediata en el sistema y en donde la diferencia del error en estado estacionario no es perceptible.

En la tabla 2 también se presentan el error absoluto medio (EAM por sus siglas) y el error cuadrático medio (ECM por sus siglas), como índices para comparar el desempeño en las estrategias. El error absoluto medio indica que la magnitud del error es menor en la estrategia de control predictivo, salvo en el caso del banco 2. Se acepta este efecto, ya que la diferencia entre los índices es pequeña, y al utilizarse la estrategia de control predictivo en conjunto con el control de los otros bancos

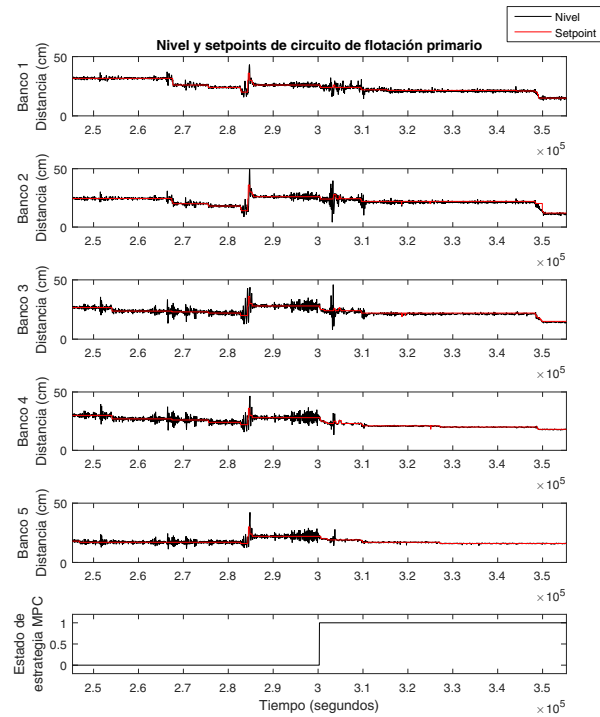


Figura 5: Comportamiento temporal de estrategia de control predictivo.

se reduce considerablemente el error de seguimiento en los siguientes bancos. Note también que el error cuadrático medio es mayor en todos los bancos, así que a pesar de que la magnitud del error sea un poco mayor en el banco 2 cuando se utiliza la estrategia de control predictivo, este error nunca tiene una magnitud muy grande, y lo mismo ocurre en los otros bancos. Por lo que se considera que la estrategia de control predictivo tiene un desempeño adecuado. Cabe destacar que el sistema se mantiene dentro de los límites impuestos por las restricciones en todo momento.

## 8. Conclusiones

Los resultados demuestran que con la estrategia de control implementada se logra reducir la varianza del nivel en los bancos del circuito de flotación, mediante la adecuada compensación de perturbaciones.

Considerando un modelo lineal en representación de estados, en donde los estados son estimados con un filtro de Kalman, y la resolución del problema de optimización de la estrategia con una herramienta optimizadora basada en algoritmos genéticos se logra crear una estrategia robusta ante el ruido de medición y en cierta medida a los errores de modelado. Al utilizar la herramienta de optimización basada en algoritmos genéticos se pueden agregar restricciones al proceso, mediante el uso de una función de penalidad apropiada.

El principal problema surgido al implementar la estrategia

de control consiste en cómo lidiar con las perturbaciones generadas por los cambios bruscos de flujo en el primer banco. En este caso se opta por utilizar un controlador PID para compensar dichas perturbaciones en el primer banco y luego utilizar la estrategia de control predictivo en los otros bancos, lo que funciona adecuadamente.

Existen varias opciones para mejorar el trabajo realizado. En primer lugar, los resultados muestran que los beneficios de la estrategia provienen de la reducción en la varianza del sistema, pero no en una mejora en el seguimiento a ganancia continua. Una de las causas de este problema puede ser el modelo utilizado para la compensación de las perturbaciones, el que ha sido indicado por Pannocchia (2003) como un modelo poco robusto para cuando el modelo no es muy preciso y para procesos que poseen un mal condicionamiento. Por lo que es interesante realizar una comparación entre otro modelo de perturbación y el utilizando en este trabajo.

Adicionalmente, hay otras formas de resolver el problema de control. Utilizando compensadores por adelantado más un controlador PID, se puede generar un controlador por desacople para el circuito. Es interesante entonces comparar ambas estrategias en términos de facilidad de implementación, desempeño de la estrategia y los problemas presentes al trabajar con el sistema debido a los largos retardos y la precisión de los modelos obtenidos.

Otra de las dificultades del trabajo consiste en poder lidiar con la poca precisión que pueden tener los modelos. En este trabajo se obtienen los modelos con el mejor ajuste para los datos de validación, aunque ninguno de ellos es muy bueno (ajuste máximo de 78.98 %). Estos modelos son utilizados en el control y entregan resultados que permiten obtener un mejor control que el de un PID, bajo los criterios del error cuadrático medio y absoluto, obteniendo una reducción en la varianza y mejorando la respuesta del circuito ante cambios de referencias del nivel de más de un banco a la vez. Por lo que se decide mantener estos modelos dentro de la estrategia de control predictivo, pero cabe destacar que encontrando un modelo que describa de mejor manera la respuesta del nivel en los bancos es posible obtener una estrategia con mejor desempeño. En la estrategia de control predictivo se puede hacer uso de un modelo no lineal, ya sea por principios fundamentales, redes neuronales o modelos difusos, para mejorar la precisión del modelo y el desempeño de la estrategia de control predictivo.

Adicionalmente se puede utilizar funciones objetivos distintas a las presentadas en (28) ya sea para mejorar el desempeño de la estrategia o para mejorar la robustez, de manera similar a lo presentado por Martínez et al. (1998).

## English Summary

### Pulp Level Control of a Flotation Circuit Using a Model Predictive Control Strategy.

#### Abstract

This work presents the design and implementation results of a model predictive control strategy used to control the pulp

level of a Rougher flotation circuit in a mine located in the third region of Chile, which is composed by five flotation banks. The strategy considers a state space representation to model the pulp level of each bank (with a multiple input - single output model), which is obtained by a system identification procedure and uses a Kalman filter as a state estimator. To solve the optimization problem that calculates the control law, a genetic algorithm based optimization tool is used. Experimental data is used to show the results of the proposed control strategy.

#### Keywords:

Model predictive control, System identification and parameter estimation, Kalman filter, Disturbance rejection, Mining, metalurgy, metals and materials

## Referencias

- Desbiens, A., Hodouin, D., Mailloux, M., 1998. Nonlinear predictive control of a rougher flotation unit using local models. Proceedings of the IFAC-MMM Automation Symposium, 297–302.
- Goldberg, D., 1989. Genetic algorithms in search optimization and machine learning. Addison-Wesley, United States of America.
- Goodwin, G., Graebe, S., Salgado, M., 2000. Control system design, 1st Edition. Prentice Hall, United States of America.
- Haupt, R., Haupt, S., 2004. Practical genetic algorithms. John Wiley & Sons, United States of America.
- Hulbert, D., 1995. Multivariable control of pulp levels in flotation circuits. Proceedings 8th International Symposium on Control in Mining, Metals and Minerals, 71–76.
- Kämpjärvi, P., Jämsä-Jounela, S., 2003. Level control strategies for flotation cells. Minerals Engineering 16 (11), 1061–1068.
- Ljung, L., 1999. System Identification: Theory for the user. Prentice Hall, United States of America.
- Martínez, M., Senent, J., Blasco, X., 1998. Generalized predictive control using genetic algorithms (gagpc). Engineering Applications of Artificial Intelligence 11 (3), 355 – 377.
- Pannocchia, G., 2003. Robust disturbance modeling for model predictive control with application to multivariable ill-conditioned processes. Journal of Process Control 13 (8), 693–701.
- Pérez-Correa, R., González, G., Casali, A., Cipriano, A., Barrera, R., Zavala, E., 1998. Dynamic modelling and advanced multivariable control of conventional flotation circuits. Minerals Engineering 11 (4), 333 – 346.
- Putz, E., Cipriano, A., 2015. Hybrid model predictive control for flotation plants. Minerals Engineering 70, 26 – 35.
- Rojas, D., Cipriano, A., 2011. Model based predictive control of a rougher flotation circuit considering grade estimation in intermediate cells. Dyna 78 (166), 29–37.
- Rossiter, J., 2013. Model-based predictive control: a practical approach. CRC press, United States of America.
- Stenlund, B., Medvedev, A., 2002. Level control of cascade coupled flotation tanks. Control engineering practice 10 (4), 443–448.
- Suárez, A., Gómez, Z., 2011. Sensor virtual entrenado usando el concepto de variables instrumentales y aplicado en la medición de temperatura en un convertidor teniente. Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial 8 (1), 54–63.
- Tulleken, H., 1990. Generalized binary noise test-signal concept for improved identification-experiment design. Automatica 26 (1), 37–49.
- Zhu, Y., 2001. Multivariable system identification for process control. Elsevier, United States of America.